UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Física Teórica

TESIS DOCTORAL

Estudio de las inconsistencias de una clase general de campos de spines 3

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Francisco Germán Sierra Rodero

DIRECTOR:

Antonio Fernández-Rañada

Madrid, 2015

Francisco Germán Sierra Rodero

ESTUDIO DE LAS INCONSISTENCIAS DE UNA CLASE GENERAL DE CAMPOS DE SPINES 3/2 Y 1/2

Departamento de Física Teórica
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid
1982

Colección Tesis Doctorales. Nº 125/82

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1981
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-16189-1982

"ESTUDIO DE LAS INCONSISTENCIAS DE UNA CLASE GENERAL DE CAMPOS DE SPINES 3/2 y 1/2"

Germán Sierra Rodero

Director: Antonio Fernández-Rañada
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense

Esta Memoria ha sido realizada en el Departamento de Física Teórica de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense, bajo la dirección del Prof. D. Antonio Fernández-Rañada, quien me inició en este campo de trabajo y a quien agradezco su constante interés y estímulo a lo largo de su desarrollo.

Asimismo, quiero expresar mi reconocimiento al Prof. A. Galindo, R. Fernández Alvarez-Estrada, M. Ramón Medrano y M. Lorente por su interés y ayuda en la realización de este trabajo.

Quiero agradecer también al Ministerio de Educación y Ciencia la concesión de una beca del Plan de Formación de Personal Investigador y al G.I.F.T. los numerosos medios que ha puesto a mi disposición.

Finalmente quiero agradecer a Mª Ascensión Iglesias su cuidadosa labor de mecanografiado y a aquellos amigos que me han ofrecido su apoyo moral.

No cabe duda de que cualquier convicción gana infinitamente en cuanto otra alma cree en ella

NOVALIS

I N D I C E

INTRODUCCION

Las teorías de campos de spin superior en interacción pretenden extender los resultados de teoría ampliamente desarrolladas y de comprobada fidelidad al estadio físico, como la teoría de Maxwell o la Electrodinámica de partículas de spin 0, 1/2.

Dicha pretensión iniciada por Dirac hace medio siglo no ha sido satisfecha, debido primordialmente a la extrema dificultad de la construcción de campos de spin superior que satisfagan simultáneamente causalidad, localidad y unitariedad, requisitos esenciales de toda teoría cuántica.

Intentemos, pues, exponer las profundas diferencias con respecto a ecuaciones de campo bien establecidas.

A diferencia del campo spinorial la descripción de partículas de spin 3/2 envuelve campos con un número de componentes mayor que el de grados de libertad como consecuencia del carácter singular de las ecuaciones.

La introducción de una interacción con campos externos modifica las ecuaciones de evolución y las condiciones subsidiarias dando lugar, inesperadamente, a soluciones que se propagan con velocidades superiores a la de la luz. Este fenómeno descubierto por Velo y Zwanziger en 1969 para el campo de Rarita-Schwinger en acoplo mínimo con campo electromagnético, permitió explicar en términos clásicos la pérdida de positividad de las relaciones de anticonmutación de los campos obtenidas en 1961 por Johnson y Sudarshan. Esta pérdida es fiel reflejo de la dependencia de las ligaduras de la dinámica.

Ambos hechos indican que la covariancia formal de sistemas de ecuaciones singularmente hiperbólicos no asegura automáticamente invariancia relativista, que ha de ser analizada en cada caso particular. Esto motiva el estudio de otros tipos de ecuaciones así como la introducción de acoplos con campos adicionales (escalares y spinoriales además del propio campo em) con objeto de obtener una teoría local y causal.

Las inconsistencias no se limitan a dicha acausalidad o no localidad ya que es posible obtener ecuaciones causales al precio de introducir o bien, una métrica indefinida o importantes alteraciones en las relaciones de conmutación con consiguientes problemas de interpretación física.

El presente trabajo aborda fundamentalmente dos cuestiones:

1) Obtención de relaciones de conmutación y determinantes característicos para ecuaciones singulares con ligaduras secundarias, estableciendo la conexión entre la pérdida de hiperbolicidad y positividad de la métrica, o equivalentemente, de las relaciones de conmutación con acoplos no derivativos con campos externos.

2) Estudio de las consecuencias que implica la eliminación gradual de las ligaduras primaria y secundaria del campo RS obteniéndose una clase general de ecuaciones de spin 3/2 y 1/2.

Esquemáticamente la distribución de este estudio se realiza de la siguiente manera:

Capítulo I. Se exponen las características generales de estas ecuaciones distinguiendo tres teorías RS, RS^* y RS^{**} según el número de grados de libertad, cuyas propiedades de hiperbolicidad se estudian en el Capítulo II.

En el Capítulo III se establece la descomposición de los campos libres RS^* y RS^{**} y los observables físicos en sus componentes irreducibles, así como el método que extiende dicha descomposición al caso de interacción.

El Capítulo IV se dedica a la Cuantificación Canónica via Principio de Schwinger utilizando el método de multiplicadores de Lagrange en la obtención de expresiones generales para las relaciones de anticonmutación.

En el Capítulo V consideramos el scattering de los campos RS^* y RS^{**} por un potencial em externo, poniendo especial énfasis en las propiedades de estabilidad en orden a obtener una teoría cuántica consistente.

En el Apéndice A se ilustra en el lenguaje de proyectores las inconsistencias algebraicas expuestas en la sección I.1.

Finalmente en el Apéndice B se reunen relaciones y métodos de cálculo utilizados ampliamente a lo largo del texto y que por brevedad no se han indicado explícitamente.

§I. ECUACIONES DE RS, RS* y RS**

1.1 ECUACIONES DE RARITA-SCHWINGER

Un campo de spin 3/2 y masa m se describe mediante un spinor-vector $\psi_{\mu\alpha}(x)$ ($\mu = 0,..,3$; $\alpha = 1,..,4$) de 16 componentes que satisface las ecuaciones de Rarita-Schwinger libres [4].

$$\left(i\gamma.\partial - m\right)_{\alpha\beta} \psi_{\mu\beta}(x) = 0 \tag{1.a}$$

$$\left(\gamma^{\mu}\right)_{\alpha\beta} \psi_{\mu\beta}(x) = 0 \tag{1.b}$$

$$\partial^{\mu} \psi_{\mu\alpha}(x) = 0 \tag{1.c}$$

Las dos últimas ecuaciones se han de interpretar como condiciones subsidiarias que eliminan de $\psi_{\mu\alpha}$ las componentes de spin 1/2 o campos auxiliares presentes en $\psi_{\mu\alpha}$. La existencia de ligaduras es una característica esencial de campos de spin superior (s ≥ 1) y causa de gran número de dificultades que cubren la teoría.

La ley de transformación del campo $\psi_{\mu\alpha}(x)$ bajo un cambio de sistema de referencia $(a,\Lambda) \in$ Grupo de Poincaré es

$$\psi'_{\mu\alpha}(x) = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, S(\Lambda)_{\alpha\beta}\, \psi_{\nu\beta}\left(\Lambda^{-1}(x-a)\right) \tag{2}$$

correspondiente a la representación del grupo de Lorentz producto directo de la representación vectorial $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y la representación spinorial $(\frac{1}{2},0) + (0,\frac{1}{2})$

Las componentes de spin 1/2 que se transforman según $(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})$ en descomposición de Clebsch-Gordon son $(\gamma.\psi)_\alpha$ y cuya eliminación se considera en (1.b). El resto de las componentes de spin 1/2 están incluidas en $(1, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, 1)$ de manera que su eliminación no es manifiestamente invariante relativista. En efecto: la "condición de transversalidad" (1.c) no es propiamente una ligadura por cuanto en ella aparece explícitamente la derivada temporal siendo las ecuaciones de evolución de primer orden. La verdadera ligadura se obtiene a partir de la ecuación (1.a) para ψ_0 y de (1.c)

$$i\partial_\mu \psi^\mu = (-i\vec{\alpha}.\vec{\nabla} + m\beta)\psi^0 + i\vec{\nabla}.\vec{\psi} = (h\vec{\alpha} - \vec{p})\vec{\psi} = 0 \tag{3}$$

donde $h = \vec{\alpha}.\vec{p} + m$ y $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$

Si en un instante dado de tiempo t_o los datos de Cauchy de la ecuación (1.a) $\psi_{\mu\alpha}(x,t_o)$ satisfacen las condiciones (1.b,c), entonces las satisfacen para todo instante t anterior o posterior a t_o. Este resultado es consecuencia directa de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (i\gamma.\partial + m)\gamma.\psi + 2i\,\partial.\psi &= 0 \\ (i\gamma.\partial - m)\partial.\psi &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

derivables de (1.a) por aplicación de γ^μ y ∂^μ respectivamente. Nótese que (1.a,b) $\Longrightarrow$ (1.c). Sin embargo (1.a,c) $\not\Longrightarrow$ (1.b).

Si el campo $\psi_\mu(x)$ está electricamente cargado interactúa con un campo electromagnético externo. Las nuevas ecuaciones según el Principio de acoplo mínimo son

$$(\gamma.\pi - m)\psi_\mu(x) = 0 \tag{5.a}$$

$$\gamma^\mu \; \psi_\mu \; = 0 \tag{5.b}$$

$$\pi^\mu \; \psi_\mu \; = 0 \tag{5.c}$$

donde $\pi_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ y A_μ es el potencial vector del campo electromagnético.

Nuevamente (5.a,b) $\Longrightarrow$ (5.c). Sin embargo es posible obtener una condición adicional aplicando π^μ a (5.a)

$$\pi_\mu (\gamma.\pi - m)\psi^\mu = (\gamma.\pi - m)\,\pi.\psi + ie\,\gamma.F.\psi \tag{6}$$

con $[\pi^\mu, \pi^\nu] = -ie\,F^{\mu\nu}$

a saber

$$\gamma.F.\psi = 0 \tag{7}$$

(7) restringe el número de componentes independientes de ψ_μ en las regiones donde el campo externo es no nulo. Esta inconsistencia, de origen algebraico, se evita derivando tanto las ecuaciones de evolución como las ligaduras a partir de un principio de acción. Este método fue propuesto originalmente por Fierz y Pauli[2]. La aparición de ligaduras adicionales sobre los campos en interacción, respecto al caso libre, contradice el criterio físico según el cual una partícula conserva su spin y masa y por tanto el número de grados de libertad aún en presencia de otros campos.

Otra lectura de la inconsistencia permite afirmar que la evolución dada por (5.a) no es compatible con las condiciones (5.b) y (5.c) para todos los tiempos según se comprueba de la sucesión de ecuaciones obtenidas a partir de (5.b)

$$(\gamma.\pi + m)\,\gamma.\psi \quad + \quad 2\,\pi.\psi \;=\; 0$$

$$(\gamma.\pi - m)\,\pi.\psi \quad + \quad ie\,\gamma.F.\psi \;=\; 0 \qquad (8)$$

$$(\gamma.\pi + m)\,\gamma.F.\psi \;-\; 2\pi.F.\psi \;-\; i\,\gamma^{\mu}(\gamma.\partial F_{\mu}{}^{\nu})\,\psi_{\nu} = 0$$

$$\vdots$$

Por lo tanto las ecuaciones que describen un campo de spin superior han de contener ab initio las ligaduras que coincidirán en el límite de campo externo nulo con las existentes en el caso libre.

1.2 SISTEMAS DE ECUACIONES SINGULARMENTE HIPERBOLICAS

Un campo se puede representar en general por un vector de N componentes $\psi(x)$ que satisface un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden [12].

$$(\beta^{\mu}\,\partial_{\mu} + \rho)\,\psi(x) = 0 \qquad (9)$$

donde β^{μ} y ρ son matrices constantes $N \times N$. (9) es una ecuación invariante relativista si existe una representación $S(\Lambda)$ del grupo de Lorentz tal que

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}(x-a)) \qquad (10)$$

es también solución de (9).

Una condición suficiente para que se satisfaga es que β^{μ} y ρ verifiquen

$$S(\Lambda)^{-1}\,\beta^{\mu}\,S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\beta^{\nu}$$

$$S(\Lambda)^{-1}\,\rho\,S(\Lambda) = \rho \qquad (11)$$

Si se impone además la existencia de una matriz hermítica η no singular con las propiedades

$$
\begin{aligned}
-(\beta^{\mu})^{\dagger} &= \eta\, \beta^{\mu}\, \eta^{-1} \\
S(\Lambda) &= \eta\, S(\Lambda)^{-1}\, \eta^{-1} \\
\rho^{\dagger} &= \eta\, \rho\, \eta^{-1}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

es posible derivar el sistema de ecuaciones (9) de un principio variacional.

La introducción de una interacción con un campo externo se manifiesta en (9) en la aparición de un "potencial" B(x)

$$\left(\beta^{\mu} \partial_{\mu} + \rho + B(x) \right) \psi(x) = 0 \tag{13}$$

que satisface la condición de hermiticidad

$$B(x)^{\dagger} = \eta\, B(x)\, \eta^{-1} \tag{14}$$

El campo autoadjunto $\overline{\psi}$ se define:

$$\overline{\psi}(x) = \psi(x)^{\dagger}\, \eta \tag{15}$$

y la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\overline{\psi}\, \beta^{\mu} \partial_{\mu} \psi - (\partial_{\mu} \overline{\psi})\, \beta^{\mu} \psi \right) + \overline{\psi} \rho \psi + \overline{\psi} B \psi \tag{16}$$

de la que se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange (13) y además

$$-\partial_{\mu} \overline{\psi}\, \beta^{\mu} + \overline{\psi} \rho + \overline{\psi} B = 0 \tag{17}$$

Si β^{0} es una matriz no singular el sistema de ecuaciones (13) se puede expresar en forma de ecuación de Schrodinger por simple multiplicación con $(\beta^{0})^{-1}$ como sucede en la ecuación de Dirac ($\beta^{\mu} = i\gamma^{\mu}$, $\rho = -m$)

Por el contrario si β^0 es una matriz singular se deduce de (13) un conjunto de restricciones sobre los datos iniciales del problema de Cauchy. En efecto: el sistema de ecuaciones (13) puede escribirse en la forma [5].

$$A^\mu \partial_\mu \psi(x) + C(x)\psi(x) = 0 \tag{18}$$

donde $A^\mu = -i\eta\beta^\mu$ son matrices hermíticas y $C(x) = -i\eta(\rho + B(x))$ matrices antihermíticas como consecuencia de (12) y (14).

A^0 es una matriz hermítica y singular ($\det A^0 = 0$) que poseerá al menos un valor propio nulo. Sea P_o el proyector del subespacio nulo de A^0. Se deduce entonces de (18) por aplicación de P_o una relación en la que ha desaparecido la derivada temporal del campo ψ

$$P_o A^\ell \partial_\ell \psi(x) + P_o C(x)\psi(x) = 0 \tag{19}$$

Dado que las matrices A^i ($i = 1,2,3$) se relacionan linealmente con la matriz A^0 se tiene $P_o A^i P_o = 0$ de donde

$$P_o A^\ell \partial_\ell (1 - P_o)\psi(x) + P_o C(x)\psi(x) = 0 \tag{20}$$

Condición que denominaremos en adelante ligadura primaria. La relación (20) es consecuencia directa de la estructura cinemática del sistema de ecuaciones (13), pues depende exclusivamente de los términos que acompañan a las derivadas de orden superior (matrices β^μ) [5].

Las ecuaciones (18) no contienen por tanto la derivada temporal de componentes $P_o\psi$, siendo éstas en general, función del resto de componentes $(1-P_o)\psi$. En ausencia de otras ligaduras (20) determina total o parcialmente las componentes $P_o\psi$. En esta última situación o en el caso en que (20) sea una relación exclusivamente entre las componentes $(1-P_o)\psi$ será necesaria la existencia de ligaduras secundarias deducidas a partir de (20) y (18), en las cuales interviene el término $B(x)$. Por tanto las ligaduras secundarias dependen de la estructura dinámica del sistema de ecuaciones (13).

Otra alternativa que se presenta es la desaparición del propio campo ψ en las ecuaciones deducidas a partir del sistema inicial resultando, como en Electrodinámica Clásica, la ley de conservación de carga. La invariancia Gauge expresa, entonces, la existencia de un número de grados de libertad inferior al número de componentes del campo.

En este estudio se trata inicialmente un campo ψ_μ masivo que obedece sistemas de ecuaciones singulares con ligaduras primarias y secundarias. A continuación, se suprimen las secundarias y por último se consideran ecuaciones no singulares.

La forma más general de matrices β^μ y ρ que verifican (11) y (12) es [30]

$$
\begin{aligned}
i\,(\beta^\nu \xi_\nu)_\mu{}^\lambda &= \gamma.\xi\, g_\mu{}^\lambda - \lambda_1 \left(\gamma_\mu \xi^\lambda + \gamma^\lambda \xi_\mu \right) + \lambda_2\, \gamma_\mu\, \gamma.\xi\, \gamma^\lambda \\
\rho_\mu{}^\lambda &= m \left(g_\mu{}^\lambda - \lambda_3\, \gamma_\mu \gamma^\lambda \right)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

siendo ξ_ν un cuadrivector y λ_i parámetros reales

El sistema de ecuaciones (9) es singular si

$$\det \beta^0 = 0 \tag{22}$$

o bien

$$\det(\beta.\xi) = 0 \tag{23}$$

La invariancia del determinante por transformaciones del grupo de Lorentz implica

$$\det(\beta.\xi) = c\,(\xi^2)^8$$

(23) se satisface si C es nulo lo que determina una relación entre λ_1 y λ_2

$$\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1^2 - \lambda_1 + \frac{1}{2} \tag{24}$$

La interacción del campo ψ_μ con un campo electromagnético externo se realiza via acoplo mínimo. Las ecuaciones de campo con la sustitución $i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu = \pi_\mu$ son:

$$(\gamma.\pi - m)\psi_\mu - \lambda_1(\gamma_\mu \pi.\psi + \pi_\mu \gamma.\psi) + \lambda_2 \gamma_\mu \gamma.\pi\, \gamma.\psi + m\lambda_3 \gamma_\mu \gamma.\psi = 0 \tag{25}$$

Las ligaduras primarias se obtienen aplicando a (25) el proyector $(P_o)_\mu{}^\lambda$ del subespacio nulo de la matriz $A^o{}_{\mu\lambda} = -i\gamma^o \beta^o{}_{\mu\lambda}$ que es de acuerdo con (21)

$$(A^o)_{\mu\lambda} = -(g_{\mu\lambda} - \lambda_1 \gamma_o \gamma_\mu g_{o\lambda} - \lambda_1 g_{o\mu} \gamma^o \gamma_\lambda + \lambda_2 \gamma_o \gamma_\mu \gamma^o \gamma_\lambda) \tag{26}$$

cuyos vectores propios nulos $v_o{}^\lambda$ satisfacen

$$(A^o)_{\mu\lambda}\, v_o{}^\lambda = 0 \tag{27}$$

Contrayendo (27) con γ^μ se puede expresar $v_o{}^\lambda$ en términos de $\gamma.v_o$

$$v_o{}^\mu = \left((2\lambda_1 - 1)\, g^{o\mu}\gamma^o + \frac{1-\lambda_1}{2}\gamma^\mu\right)\gamma.v_o \tag{28}$$

Lo que indica que, salvo en el caso $\lambda_1 = 1/2$ en el cual $v_o{}^\mu = \frac{1}{4}\gamma^\mu \gamma.v_o$ los "vectores" v_o^μ no se transforman según la ley (2).

El proyector P_o es por tanto

$$(P_o)^{\mu\lambda} = \frac{1}{3\lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 1}\left[(2\lambda_1 - 1)\gamma^o g^{o\mu} + \frac{1-\lambda_1}{2}\gamma^\mu\right]\left[(2\lambda_1 - 1)\gamma^o g^{o\lambda} + \frac{1-\lambda_1}{2}\gamma^{\lambda +}\right] \tag{29}$$

comprobándose

las ecuaciones deducidas a partir del sistema inicial resultando, como en Electrodinámica Clásica, la ley de conservación de carga. La invariancia Gauge expresa, entonces, la existencia de un número de grados de libertad inferior al número de componentes del campo.

En este estudio se trata inicialmente un campo ψ_μ masivo que obedece sistemas de ecuaciones singulares con ligaduras primarias y secundarias. A continuación, se suprimen las secundarias y por último se consideran ecuaciones no singulares.

La forma más general de matrices β^μ y ρ que verifican (11) y (12) es [30]

$$\begin{aligned} i\,(\beta^\nu \xi_\nu)_\mu{}^\lambda &= \gamma.\xi\; g_\mu{}^\lambda - \lambda_1 \,(\gamma_\mu \xi^\lambda + \gamma^\lambda \xi_\mu) + \lambda_2\, \gamma_\mu\, \gamma.\xi\, \gamma^\lambda \\ \rho_\mu{}^\lambda &= m\,(g_\mu{}^\lambda - \lambda_3\, \gamma_\mu \gamma^\lambda) \end{aligned} \qquad (21)$$

siendo ξ_ν un cuadrivector y λ_i parámetros reales

El sistema de ecuaciones (9) es singular si

$$\det \beta^0 = 0 \qquad (22)$$

o bien

$$\det(\beta.\xi) = 0 \qquad (23)$$

La invariancia del determinante por transformaciones del grupo de Lorentz implica

$$\det(\beta.\xi) = c\,(\xi^2)^8$$

(23) se satisface si c es nulo lo que determina una relación entre λ_1 y λ_2

$$\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1^2 - \lambda_1 + \frac{1}{2} \qquad (24)$$

del campo ψ_μ con un campo electromagnético externo se
ínimo. Las ecuaciones de campo con la sustitución
$= \pi_\mu$ son:

$$_\mu \pi.\psi + \pi_\mu \gamma.\psi) + \lambda_2 \gamma_\mu \gamma.\pi \gamma.\psi + m\lambda_3 \gamma_\mu \gamma.\psi = 0 \qquad (25)$$

rimarias se obtienen aplicando a (25) el proyector $(P_o)_\mu{}^\lambda$
de la matriz $A^o{}_{\mu\lambda} = -i\gamma^o \beta^o{}_{\mu\lambda}$ que es de acuerdo con

$$\lambda_1 \gamma_o \gamma_\mu g_{o\lambda} - \lambda_1 g_{o\mu} \gamma^o \gamma_\lambda + \lambda_2 \gamma_o \gamma_\mu \gamma^o \gamma_\lambda) \qquad (26)$$

os nulos $v_o{}^\lambda$ satisfacen

$$(A^o)_{\mu\lambda}\, v_o{}^\lambda = 0 \qquad (27)$$

) con γ^μ se puede expresar $v_o{}^\lambda$ en términos de $\gamma.v_o$

$$(2\lambda_1 - 1)\, g^{o\mu}\gamma^o + \frac{1-\lambda_1}{2}\gamma^\mu)\ \gamma.v_o \qquad (28)$$

alvo en el caso $\lambda_1 = 1/2$ en el cual $v_o{}^\mu = \frac{1}{4}\gamma^\mu \gamma.v_o$ los
e transforman según la ley (2).

es por tanto

$$\sum_{\nu} (P_o)^{\mu\nu} (P_o)^{\nu\lambda} = (P_o)^{\mu\lambda}$$

$$(P_o)^{\mu\lambda +} = (P_o)^{\lambda\mu} \qquad (30)$$

$$\sum_{\lambda} (P_o)^{\mu\lambda} v_o^{\lambda} = v_o^{\mu}$$

Dada la forma de P_o basta multiplicar por la izquierda (25) por $(2\lambda_1-1)\gamma^0 g^{0\mu} + \frac{1-\lambda_1}{2}\gamma^{\mu}$ teniendo en cuenta (24) para obtener la ligadura primaria

$$(2\lambda_1-1)\left[\gamma^0(\gamma.\pi-m)\psi_0 - \lambda_1 \pi.\psi - \lambda_1\gamma^0\pi^0\,\gamma.\psi + \lambda_2\,\gamma.\pi\,\gamma.\psi + m\lambda_3\,\gamma.\psi\right] +$$

$$+ \frac{1-\lambda_1}{2}\left[2(1-2\lambda_1)\,\pi.\psi + (4\lambda_2-\lambda_1-1)\,\gamma.\pi\,\gamma.\psi + (4\lambda_3-1)m\,\gamma.\psi\right] = 0 \qquad (31)$$

En esta expresión desaparecen todos los términos en derivadas temporales como es obvio.

Si $\lambda_1 \neq 1/2$ podemos simplificar esta expresión considerablemente:

$$(\vec{\pi} - h\vec{\alpha})\vec{\psi} + \left[(1-\lambda_1)\vec{\gamma}.\vec{\pi} + \frac{1-3\lambda_1+2\lambda_3}{2(2\lambda_1-1)}m\right]\gamma.\psi = 0 \qquad (32)$$

donde $h = \vec{\alpha}.\vec{\pi} + \beta m$

Si $\lambda_1 = 1/2$ entonces $\lambda_2 = 3/8$ y (31) resulta

$$(4\lambda_3 - 1)m\,\gamma.\psi = 0 \qquad (33)$$

Distingamos dos casos 1°) $\lambda_3 \neq 1/4$; (33) $\Longrightarrow \gamma.\psi = 0$. 2°) $\lambda_3 = 1/4$; (33) y (31) se verifican trivialmente no existiendo ninguna condición sobre $\gamma.\psi$

$\delta \vec{\psi}$. Este hecho muestra la existencia de invariancia Gauge.

En efecto: sea ψ_μ una solución del sistema de ecuación (25) con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$, entonces la transformada Gauge de ψ_μ

$$\psi'_\mu(x) = \psi_\mu(x) + \gamma_\mu \Lambda(x) \qquad (34)$$

donde $\Lambda(x)$ es un spinor de Dirac arbitrario, es también solución de (25). Evidentemente se verifica:

$$(\gamma.\pi - m)\gamma_\mu \Lambda - \frac{1}{2}\gamma_\mu \gamma.\pi \Lambda - 2\pi_\mu \Lambda + \frac{3}{2}\gamma_\mu \gamma.\pi \Lambda + m\gamma_\mu \Lambda = 0$$

El campo gauge $\Lambda(x)$ puede elegirse de manera que $\gamma.\psi = 0$ lo que nos devuelve al caso 1°). Esta invariancia gauge reduce a 12 el número de componentes independientes del campo.

Para estudiar la existencia de ligaduras adicionales regresamos a (25) y contraemos con γ^μ y π^μ

$$2(1-2\lambda_1)\,\pi.\psi + (4\lambda_2 - \lambda_1 - 1)\,\gamma.\pi\,\gamma.\psi + (4\lambda_3 - 1)\,m\,\gamma.\psi = 0 \qquad (35)$$

$$\left[(\lambda_2 - \lambda_1)\pi^2 + m\lambda_3\,\gamma.\pi - \frac{e}{2}\lambda_2\,\sigma.F\right]\gamma.\psi \; +$$

$$+ \left[(1-\lambda_1)\gamma.\pi - m\right]\pi.\psi + ie\,\gamma.F.\psi = 0 \qquad (36)$$

donde se ha utilizado:

$$\gamma^\mu\,\gamma.\pi = -\gamma.\pi\,\gamma^\mu + 2\pi^\mu$$

$$\pi^\mu\,\gamma.\pi = \gamma.\pi\,\pi^\mu + ie\,\gamma.F^\mu$$

$$(\gamma.\pi)^2 = \pi^2 - \frac{e}{2}\,\sigma.F$$

Nota: $\quad \sigma.F = \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

Si $\lambda_1 \neq 1/2$ multiplicando (35) por la izquierda con $(1-\lambda_1)\,\gamma.\pi - m$ y eliminando los términos en $\pi.\psi$ por medio de (36) resulta

$$\left[a\,\gamma.\pi + (1-4\lambda_3)m + \lambda_1(1-2\lambda_1)\frac{e}{m}\sigma.F \right]\gamma.\psi + 2(2\lambda_1-1)\frac{ie}{m}\gamma.F.\psi = 0 \tag{37}$$

donde $a = -\;6\lambda_1^2 + 6\lambda_1 + 2\lambda_3 - 2$

Esta fórmula se convierte en una ligadura si a = 0, es decir cuando

$$\lambda_3 = 3\lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 1 \tag{38}$$

A partir de (35) y (37) se expresan $\gamma.\psi$ y $\pi.\psi$ en términos del campo externo:

$$\gamma.\psi = \frac{2(\lambda_1-1)}{3(1-2\lambda_1)}\frac{ie}{m^2}\gamma.F.\psi + \frac{2\lambda_1}{3(2\lambda_1-1)}\frac{e}{m^2}\gamma^5\gamma.\tilde{F}.\psi \tag{39}$$

$$\pi.\psi = \frac{2e}{(2\lambda_1-1)m^2}\left[\left(\frac{\lambda_1}{2}-\frac{1}{6}\right)\gamma.\pi + \left(\frac{1}{2}-\lambda_1\right)m\right]\left[(1-\lambda_1)\,i\,\gamma.F.\psi + \lambda_1\gamma^5\gamma.\tilde{F}.\psi\right] \tag{40}$$

donde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$

En el límite de campo externo nulo $F_{\mu\nu} \to 0$, (39) y (40) coinciden exactamente con las condiciones subsidiarias de la ecuación de RS libre (I.1-b) y (I.1-c). (32) y (39) reducen a 8 el número de componentes independientes del campo, incluso en presencia de campo electromagnético externo. Queda por tanto superada la inconsistencia algebraica estudiada en (I.1). La familia uniparamétrica de ecuaciones (λ_1) que satisfacen (24) y (38) es un buen candidato para la descripción de un campo de spin 3/2.

Cuando a ≠ 0 (37) se convierte en una ecuación para $\gamma.\psi$ que en el caso libre es la ecuación de Dirac de masa $m_{1/2}$

$$(i\gamma.\partial - m_{1/2})\,\gamma.\psi = 0 \tag{41}$$

con $\quad m_{1/2} = \dfrac{4\lambda_3 - 1}{a}\, m$

El campo tiene ahora 12 grados de libertad. Observándose además que (25) depende de dos parámetros λ_1 y λ_3 con $\lambda_3 \neq 3\lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 1$ la cual denotaremos simbólicamente por RS^*. Análogamente las ecuaciones (25) no singulares $(\lambda_2 \neq \frac{3}{2}\lambda_1^2 - \lambda_1 + \frac{1}{2})$ dependientes de tres parámetros λ_1, λ_2 y λ_3 se denotaran por RS^{**}. La ausencia total de ligaduras supone la independencia de las 16 componentes del campo ψ_μ de RS^{**}. En RS^* y RS^{**} los 4 y 8 grados de libertad adicionales corresponden a uno y dos campos de spin 1/2 respectivamente.

Completamos el estudio de los sistemas (25) singulares con los casos $\lambda_1 = 1/2$.

En el primero $\lambda_3 \neq 1/4$ y por tanto de (35) y (36) se tiene

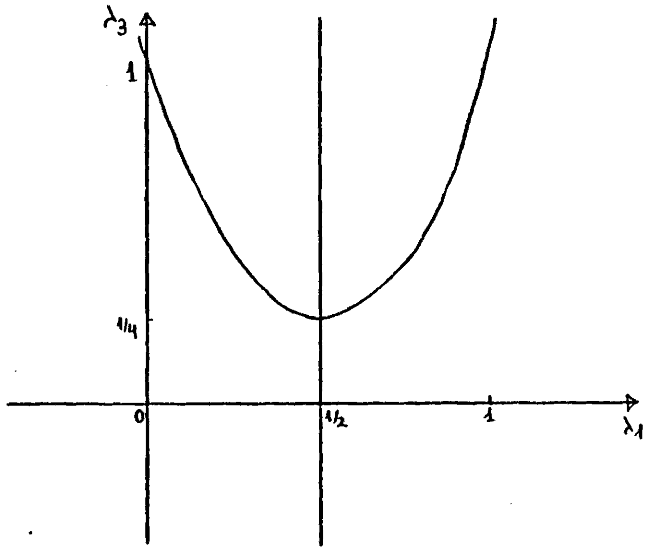
$$\gamma . \psi = 0 \tag{42}$$

$$(\gamma.\pi - 2m)\, \pi.\psi + 2ie\, \gamma.F.\psi = 0 \tag{43}$$

No es posible obtener ligaduras adicionales al margen de (42): El campo tiene 12 grados de libertad.

Si $\lambda_3 = 1/4$ la (35) es trivial y (36) no es una ligadura por lo que el campo tiene también 12 grados de libertad.

Resumimos todos los casos de ecuaciones singulares estudiados dibujando en el plano (λ_1, λ_3) la parábola (38) de ecuaciones de 8 componentes independientes y la recta $\lambda_1 = 1/2$ que corta a la parábola en la ecuación invariante gauge de 12 componentes $(\lambda_1, \lambda_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$



Eĺ contenido de masa y spin de las teorías consideradas (RS, RS*, RS**) no determina unívocamente la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(\psi, \lambda_i)$ existiendo una rela ción entre soluciones de ecuaciones con distintos parámetros

En efecto, sea $\mathcal{L}(\psi, \lambda_i)$ la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\psi,\lambda_i) = - \Big\{ \bar{\psi}\,(\gamma.\pi - m)\,\psi - \lambda_1\, \bar{\psi}.\gamma\ \pi.\psi - \lambda_1\, \bar{\psi}.\pi\ \gamma.\psi + \lambda_2\, \bar{\psi}.\gamma\ \gamma.\pi\ \gamma.\psi + m\lambda_3\, \bar{\psi}.\gamma\ \gamma.\psi \Big\} \qquad (44)$$

en la cual las derivadas actuan sobre el campo ψ_μ con lo que $\mathcal{L}$ no es "manifiestamente" real.

Si se efectúa una transformación simultánea del campo

$$\psi'_\mu = \psi_\mu + \theta\, \gamma_\mu\, \gamma.\psi \qquad (45)$$

y los parámetros

$$\lambda'_1 = \frac{\lambda_1 + 2\theta}{1 + 4\theta}$$

$$\lambda'_2 = \frac{\lambda_2 + 2\theta\lambda_1 + 2\theta + 6\theta^2}{(1+4\theta)^2} \qquad (46)$$

$$\lambda'_3 = \frac{\lambda_3 + 2\theta + 4\theta^2}{(1+4\theta)^2}$$

se tiene

$$\mathcal{L}(\psi, \lambda_i) = \mathcal{L}(\psi', \lambda'_i) \qquad (47)$$

Si Ψ es solución de la ecuación de Euler-Lagrange (25) con los parámetros λ_i entonces ψ' dada por (45) sería solución de la misma ecuación con los parámetros λ'_i dados por (46).

Se comprueba que las relaciones (24) y (38) son invariantes bajo la transformación (46). También lo es la recta $\lambda_1 = 1/2$

El punto $\vec{\lambda}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$ es el único punto fijo de la transformación (46). Además es el punto al que se aproxima asintóticamente el transformado de un punto cualquiera cuando $\theta \to \pm\infty$ es decir $|\vec{\lambda} - \vec{\lambda}_0| = O(1/\theta)$

El conjunto de transformaciones (45) con $\theta \neq -1/4$ es un grupo uniparamétrico con la ley de producto

$$T^{\mu}{}_{\nu}(\theta_1)\, T^{\nu}{}_{\lambda}(\theta_2) = T^{\mu}{}_{\lambda}(\theta_1 + \theta_2 + 4\theta_1\theta_2) \qquad (48)$$

donde $T^{\mu}{}_{\nu}(\theta) = g^{\mu}_{\nu} + \theta\gamma^{\mu}\gamma_{\nu}$

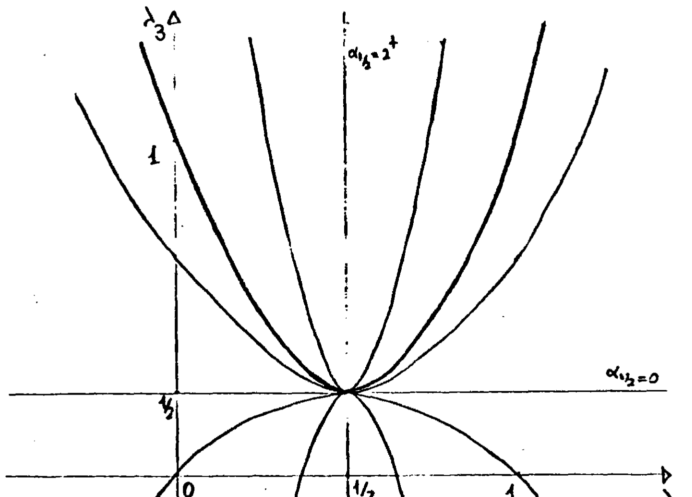
siendo el elemento unidad $T^{\mu}{}_{\nu}(0) = g^{\mu}_{\nu}$ y el inverso de $T^{\mu}{}_{\nu}(\theta)$

$$T^{\mu}{}_{\nu}(\theta)^{-1} = T^{\mu}{}_{\nu}\left(-\frac{\theta}{1+4\theta}\right)$$

Las órbitas de (46) en el plano (λ_1, λ_3) son parábolas cuyo vértice pasa por el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

$$\lambda_3 = \frac{1 - 2\alpha_{1/2} + 6\,\alpha_{1/2}\lambda_1 - 6\,\alpha_{1/2}\lambda_1^2}{2(2-\alpha_{1/2})} \qquad (49)$$

siendo $\alpha_{1/2}$ la razón $m_{1/2}/m$. Obsérvar que en el límite $\alpha_{1/2} \to \pm\infty$ se obtiene la parábola (38).



Si $\alpha_{1/2} \to 2^{\pm}$ las parábolas tienden a la semirecta superior o inferior $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_3 \gtrless 1/4$. La Fig.2 caracteriza la configuración topológica del espacio de las ecuaciones (25). Todas aquellas ecuaciones situadas sobre la misma órbita describen, esencialmente, las mismas propiedades físicas. Los observables físicos no dependen de la elección de parámetros, interviniendo explícitamente en las funciones de Green de los campos, lo que induce a pensar en una dependencia de la matriz S del conjunto $\{\lambda_i\}$. Sin embargo el teorema de cambio de variables en teoría de campos debido a Kamefuchi-Raifertaigh-Salam[20] asegura la invariancia de la matriz S bajo transformaciones puntuales de campos y parámetros del tipo descrito por (46) y (47).

Por último se considerarán en este parágrafo las propiedades métricas de las ecuaciones singularmente hiperbólicas (24,25).

Sean ψ_1 y ψ_2 dos soluciones del sistema de ecuaciones (13) donde B(x) satisface la condición de hermiticidad (14). Entonces el bilineal

$$J^{\mu}_{12}(x) = -i\,\overline{\psi}_1(x)\,\beta^{\mu}\,\psi_2(x) \tag{50}$$

es una corriente conservada

$$\partial_{\mu}\,J^{\mu}_{12}(x) = 0 \tag{51}$$

Es posible definir un producto escalar de las dos funciones ψ_1 , ψ_2

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\sigma} = -i \int_{\sigma} \overline{\psi}_1\,\beta^{\mu}\,\psi_2\,d\sigma_{\mu} \tag{52}$$

siendo σ una superficie de integración tipo espacio.

El producto $\langle\ ,\ \rangle_{\sigma}$ es independiente de la superficie de integración elegida pues aplicando el Teorema de Gauss y la ley de conservación (51)

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\sigma} - \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\sigma'} = -i \int_{\sigma'}^{\sigma} \partial_{\mu}(\overline{\psi}_1\,\beta^{\mu}\,\psi_2)\,d^4x = 0$$

Si elegimos superficies de tiempo constante (t = cte) en (52) se tiene

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int \psi_1^{+}\,A^{0}\,\psi_2\,d^3x \tag{53}$$

siendo $A^0 = -i\,\eta\,\beta^0$ una matriz hermítica lo que hace de (53) una buena definición de producto escalar. Sus valores propios se obtienen de la ecuación característica:

$$|A^0 - x I| = \begin{vmatrix} 2\lambda_1-\lambda_2-1-x & (\lambda_2-\lambda_1)\alpha_1 & (\lambda_2-\lambda_1)\alpha_2 & (\lambda_2-\lambda_1)\alpha_3 \\ (\lambda_2-\lambda_1)\alpha_1 & 1-\lambda_2-x & -i\lambda_2\Sigma_3 & i\lambda_2\Sigma_2 \\ (\lambda_2-\lambda_1)\alpha_2 & i\lambda_2\Sigma_3 & 1-\lambda_2-x & -i\lambda_2\Sigma_1 \\ (\lambda_2-\lambda_1)\alpha_3 & -i\lambda_2\Sigma_2 & i\lambda_2\Sigma_1 & 1-\lambda_2-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)^8 \left(x^2 + 2(2\lambda_2-\lambda_1)x + 2\lambda_2 - 3\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1\right)^4 = 0 \qquad (54)$$

Si se verifica (24) los autovalores de A^0 son

$x = 1$ (degeneración = 8)

$x = 2(-3\lambda_1^2 + 3\lambda_1 - 1)$ (degeneración = 4)

$x = 0$ (degeneración = 4)

El primer autovalor corresponde a componentes de spin 3/2 mientras los otros dos a componentes spinoriales. Una de ellas da una contribución nula a la norma en cuyo caso se obtiene una ligadura primaria o una invariancia gauge sobre el campo ψ_μ . Las restantes contribuyen con signo menos a la norma cualquiera que sea el valor de λ_1 . El papel de las ligaduras secundarias en RS es el de fijar estas componentes de forma que el producto escalar restringido al subespacio de componentes independientes sea definido positivo. En ausencia de ligaduras secundarias estamos avocados a una métrica indefinida. Esto mismo ocurre si (24) no se satisface, pues las raices del segundo término en (45) no pueden ser ambas positivas. Efectivamente, supongamos que lo fuera, entonces

$$2\lambda_2 - 3\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1 \geq 0 \qquad (55.a)$$

$$2\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0 \qquad (55.b)$$

La primera ecuación determina en el plano (λ_1, λ_2) la región superior limitada por la parábola $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1^2 - \lambda_1 + \frac{1}{2}$, que es disjunta de la región inferior limitada por la recta $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1$, llegando a una contradicción.

En base a estas consideraciones se sigue que la única teoría con métrica definida positiva es la teoría de RS con 8 grados de libertad. Sin embargo una nueva inconsistencia viene a sumarse a las ya conocidas pues para campos externos suficientemente intensos el producto escalar deja de ser definido positivo [6].

En efecto, elijamos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ por simplicidad, entonces el producto $\langle\, , \rangle$ dado por (44) es:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int [\vec{\psi}_1^{\dagger} \cdot \vec{\psi}_2 - (\vec{\psi}_1^{\dagger} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\alpha} \cdot \vec{\psi}_2)]\, d^3x = \int \vec{\psi}_1^{\dagger} A^{\circ} \vec{\psi}_2\, d^3x \qquad (56)$$

donde $A^{\circ}_{ij} = \delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j$ tiene el espectro

$$\sigma(A^{\circ}) = \{ 1\ (\deg 8),\ -2\ (\deg 4),\ 0\ (\deg 4) \}$$

Las funciones $\vec{\psi}_1$ y $\vec{\psi}_2$ han de satisfacer la ligadura (32)

$$(\vec{\pi} - h\vec{\alpha}) \cdot \vec{\psi} = \vec{V} \cdot \vec{\psi} = 0 \qquad (57)$$

que pertenecen al subespacio asociado al proyector Q

$$Q_{ij} = \delta_{ij} - V_i^{\dagger} (\vec{V} \cdot \vec{V}^{\dagger})^{-1} V_j \qquad (58)$$

con $\vec{V} \cdot \vec{V}^{\dagger} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi})^2 + \vec{\pi}^2 + 3m^2$ un operador invertible.

El producto (56) se escribe en el subespacio Q

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int \vec{\psi}_1^{\dagger}\, Q A^{\circ} Q\, \vec{\psi}_2\, d^3x \qquad (59)$$

Las propiedades de positividad del operador $QA^{\circ}Q$ son análogas a las de su inverso $C = (QA^{\circ}Q)^{-1}$ cuyo estudio se realiza en el Capítulo III. La conclusión más importante es la existencia de un campo magnético crítico $B_c = \frac{3m^2}{2e}$ por encima del cual C y por tanto $Q A^0 Q$ deja de ser definido positivo. El proyecto Q hace intervenir para campos elevados las componentes de norma negativa del campo.

§II. HIPERBOLICIDAD DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO SINGULARES

II.1 SISTEMAS DE ECUACIONES HIPERBOLICAS

La descripción matemática de fenómenos propagatorios en una teoría relativista se realiza por medio de funciones de onda o campos $\psi(x)$ que satisfacen sistemas de ecuaciones hiperbólicas.

Consideremos una ecuación invariante relativista general

$$\left(\beta^{\mu}(u)\,\partial_{\mu} + \rho(u)\right)\psi(x) = 0 \tag{1}$$

donde ψ es un campo de N componentes, $\beta^{\mu}(u)$ y $\rho(u)$ matrices N x N dependientes de un campo externo u que se transforman bajo un elemento (a,Λ) del grupo de Poincaré

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}(x-a)) \\ S(\Lambda)^{-1}\,\beta^{\mu}(u)\,S(\Lambda) &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\beta^{\nu}(u') \\ S(\Lambda)^{-1}\,\rho(u)\,S(\Lambda) &= \rho(u') \end{aligned} \tag{2}$$

Siendo $S(\Lambda)$ una representación del grupo de Lorentz y u' el transformado de u.

El sistema de ecuaciones (1) es simplemente hiperbólico en un sistema de referencia K si todas las raices $n_o^{(1)},\ldots,n_o^{(N)}$ de la ecuación característica [32]

$$D(n,u) = |\beta^{\mu}(u)\,n_{\mu}| = 0 \tag{3}$$

son reales para cada vector unitario $\vec{n}$, y los vectores $w_1,\ldots,W_N$ satisfacen

$$\beta^{\mu}(u)\, n_{\mu}\, W_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, N \tag{4}$$

y son linealmente independientes, formando una base del espacio $\mathbb{R}^N$.

El sistema se denomina estrictamente hiperbólico si todas las raices $n_o^{(j)}$ son distintas.

Las superficies cuya normal n_{μ} satisface (3) se denominan superficies características. El problema de Cauchy es resoluble, al menos para tiempos pequeños, sobre superficies no características. La máxima velocidad de propagación para el j-ésimo modo viene dada por la pendiente de la j-ésima superficie característica

$$V_j = \frac{n_o^{(j)}}{|\vec{n}|} \tag{5}$$

La derivada normal del campo a través de esta superficie es discontínua y su discontinuidad proporcional al vector W_j

$$[\,\partial_{\mu}\psi\,]_j = n_{\mu}^{(j)}\, W_j \tag{6}$$

Observar que la noción de hiperbolicidad impone ciertas limitaciones al campo externo u que denominaremos condiciones de hiperbolicidad.

La invariancia formal relativista del sistema (1) dada por (2) parece asegurar el contenido relativista de las teorías y en particular la causalidad en el sentido de Einstein de propagación de soluciones con velocidad inferior a la de la luz c = 1. Sin embargo Velo y Zwanziger [6] mostraron en 1969 en el estudio de la ecuación RS de spin 3/2 que dicha suposición era falsa, hallando velocidades de propagación superluminales. Este resultado ha aparecido posteriormente en numerosas ecuaciones de spin superior en interacción [7,25,28].

Demostraremos a continuación, en el caso particular de RS en acoplo mínimo, la equivalencia entre un sistema de ecuaciones singularmente hiperbólico (I.13) y un sistema de ecuaciones hiperbólico (II.1) que conserva en su evolución las ligaduras del anterior.

II.2 CAMPO RS EN ACOPLO MINIMO

La ecuación de RS es (I.25) con λ_2 y λ_3 función de λ_1 (I.24,29). $\gamma.\psi$ y $\pi.\psi$ están dadas en términos del campo electromagnético externo $F_{\mu\nu}$ por (I.39,40). Sustituyendo estas relaciones en (I.25) resulta:

$$(\gamma.\pi - m)\psi_\mu + \frac{2e/3m^2}{2\lambda_1 - 1}\left\{ \lambda_1 \pi_\mu + \frac{\lambda_1 - 1}{2}\gamma_\mu \gamma.\pi + \frac{3\lambda_1 - 2}{2} m\gamma_\mu \right\} \times$$

$$\times \left\{ i(\lambda_1 - 1)\gamma.F.\psi - \lambda_1 \gamma^5 \gamma.\tilde{F}.\psi \right\} = 0 \tag{7}$$

ecuación de la forma (1). No es difícil comprobar que (7) conserva las ligaduras (I.32,39).

La ecuación característica se obtiene reemplazando $\pi_\nu \rightarrow n_\nu$ en la parte principal de (7)

$$D(n,F) = \left| (\beta^\nu n_\nu)_\mu{}^\lambda \right| =$$

$$= \left| \gamma.n\, g_\mu^\lambda + \frac{2e/3m^2}{2\lambda_1 - 1}\left(\lambda_1 n_\mu + \frac{\lambda_1 - 1}{2}\gamma_\mu \gamma.n\right)\left(i(\lambda_1 - 1)\gamma.F^\lambda - \lambda_1 \gamma^5 \gamma.\tilde{F}^\lambda\right) \right| = 0 \tag{8}$$

El cálculo de este determinante para todos los valores de λ_1 es complicado siendo el resultado independiente de λ_1, lo cual confirma la equivalencia física de la familia de ecuaciones de RS $-\lambda_1$. [6].

$$D(n,F) = (n^2)^6 \left(n^2 + \left(\frac{2e}{3m^2}\, n.\tilde{F}\right)^2 \right)^2 \tag{9}$$

Si se buscan superficies características t = cte, entonces $n_\mu = n(1,\vec{0})$ y (9) queda:

$$D(n,F) = n^{16} \left(1 - \left(\frac{2e}{3m^2}\vec{B}\right)^2\right)^2 = 0 \tag{10}$$

que se satisface cuando $\left|\frac{2e}{3m^2}\vec{B}_c\right| = 1$. Para valores de campo magnético superiores al crítico B_c la ecuación (7) deja de ser hiperbólica. Para campos magnéticos débiles

$$1 - \left(\frac{2e}{3m^2}\vec{B}\right)^2 > 0 \tag{11}$$

la ecuación es hiperbólica.

El valor del campo crítico B_c coincide con el obtenido inicialmente por Johnson y Sudarshan en la cuantificación de RS [5] para la pérdida de positividad en las relaciones de anticonmutación del campo.

Las velocidades características de los modos de propagación "extraordinarios" ($n^2 \neq 0$) verifican:

$$n_0 = \frac{\left(\frac{2e}{3m^2}\right)^2(\vec{E}\times\vec{B}).\vec{n} \pm \sqrt{\left(1-\left(\frac{2e}{3m^2}\vec{B}\right)^2\right)\left[\vec{n}^2+\left(\frac{2e}{3m^2}\right)^2(\vec{n}\times\vec{E})^2-\left(\frac{2e}{3m^2}\right)^2(\vec{n}.\vec{B})^2\right]+\left(\frac{2e}{3m^2}\right)^4((\vec{E}\times\vec{B}).\vec{n})^2}}{1-\left(\frac{2e}{3m^2}\vec{B}\right)^2} \tag{12}$$

Siendo $n_o > 1$ para todo vector unitario $\vec{n}$.

Si $B \to B_c$ entonces $|n_o| \to \infty$

La no invariancia relativista de (11) se halla en íntima conexión con la aparición de velocidades superluminales, constituyendo una característica general de sistemas de ecuaciones de la forma (1). Este hecho se enuncia en el teorema conexión causalidad-condiciones de hiperbolicidad [29].

"Las condiciones de hiperbolicidad de (1) son invariantes si y solo si las velocidades características verifican $|n_o| \leq 1$ para cualquier dirección espacial $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$)".

La demostración se basa en propiedades geométricas de conos de normales que satisfacen (3). En la mayoría de los casos conocidos el determinante característico (3) puede expresarse

$$D(n,u) = \prod_{k=1}^{N/2} \bar{g}^{(k)}_{\mu\nu}(u)\, n^\mu n^\nu \tag{13}$$

lo cual es rigurosamente cierto si N es par y (1) es invariante bajo inversión temporal [29].

En ausencia de campo externo

$$\bar{g}^{(k)}_{\mu\nu}(0) = g_{\mu\nu} \qquad , \quad D(n,0) = (n^2)^{N/2} \tag{14}$$

el tensor $\bar{g}^{(k)}_{\mu\nu}$ (u) juega el papel de métrica generalizada asociada al k-ésimo modo de propagación [9].

Las condiciones de hiperbolicidad se obtienen directamente de las propiedades de $\bar{g}^{(k)}_{\mu\nu}$. La normal n_μ a la k-ésima superficie característica satisface

$$\bar{g}^{(k)}_{\mu\nu}(u)\; n^\mu n^\nu = 0 \tag{15}$$

Si $\bar{g}^{(k)}_{oo}$ (u) $\neq 0$ entonces (15) es una ecuación de 2° orden para $n_o^{(k)}$ con $\vec{n}$ fijo.cuya solución es:

$$n_o^{(k)} = \frac{-\bar{g}^{(k)}_{oi}\, n^i \pm \sqrt{h^{(k)}_{ij}\, n^i n^j}}{\bar{g}^{(k)}_{oo}} \tag{16}$$

siendo $h^{(k)}_{ij} = g^{(k)}_{oi}\, g^{(k)}_{oj} - g^{(k)}_{oo}\, g^{(k)}_{ij}$.

La ecuación es hiperbólica cuando $n_o^{(k)}$ es real $\forall \vec{n}$ lo que implica $h_{ij}^{(k)}(u)$ es una matriz definida positiva para todo k = 1,..,N/2.

Si $\bar{g}_{oo}^{(k)}(u) = 0$ para algún k entonces $n_\mu = n(1,0)$ es solución de (3) y la ecuación deja de ser propiamente hiperbólica.

Ilustremos lo anterior con el estudio del tensor métrico de los modos extraordinarios de RS

$$\bar{g}_{\mu\nu}\, n^\mu n^\nu = n^2 + \left(\frac{2e}{3m^2}\, n.\tilde{F}\right)^2$$

con

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{2e}{3m^2}\, \tilde{F}_{\mu\lambda}\, \tilde{F}^{\lambda}{}_{\nu} \tag{17}$$

de donde

$$h_{ij} = \left(\frac{2e}{3m^2}\right)^4 (\vec{E}\times\vec{B})_i\, (\vec{E}\times\vec{B})_j \; +$$

$$+ \left(1 - \left(\frac{2e}{3m^2}\vec{B}\right)^2\right)\left(\delta_{ij} - \left(\frac{2e}{3m^2}\right)^2 B_i B_j + \delta_{ij}\left(\frac{2e}{3m^2}\right)^2 \vec{E}^2 - \left(\frac{2e}{3m^2}\right)^2 E_i E_j\right) \tag{18}$$

Los valores propios de h_{ij} son positivos si se verifican $\left(\frac{2e}{3m^2} = 1\right)$

$$1 - \vec{B}^2 + \vec{E}^2 - (\vec{E}.\vec{B})^2 > 0 \tag{19a}$$

$$(1 - \vec{B}^2)\,(1 - \vec{B}^2 + \vec{E}^2 - (\vec{E}.\vec{B})^2) > 0 \tag{19b}$$

$$(1 - \vec{B}^2)\,(2 - \vec{B}^2 + \vec{E}^2) > 0 \tag{19c}$$

De (19a) y (19b) se deduce

$$1 - \vec{B}^2 > 0 \tag{19d}$$

que implica todas las demás.

La causalidad de una ecuación queda asegurada si la condición:

$$\bar{g}^{(K)}_{00}(u) > 0 \qquad \forall K \tag{20}$$

es invariante Lorentz.

En efecto: la ecuación (1) es causal si

$$\bar{g}^{(K)}(u)\,(\bar{\Lambda}^{\prime}s,\ \bar{\Lambda}^{\prime}s) > 0 \qquad \forall K \quad \forall \Lambda \in \mathcal{L}$$

siendo S un vector de tipo tiempo. Entonces:

$$\bar{g}^{(K)}(\Lambda u)\,(s, s) > 0$$

denotando por u' = Λ u el transformado de u bajo $\Lambda \in \mathcal{L}$

Si se elige S = $(1,\vec{0})$ se obtiene (20).

II.3 CAMPO RS* CON ACOPLO MINIMO

El estudio del campo RS* de 12 grados de libertad se simplifica con la elección $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = b$. La ecuación de campo (I.25) es

$$(\gamma.\pi - m)\,\psi_\mu + \tfrac{1}{2}\,\gamma_\mu\,\gamma.\pi\,\gamma.\psi + m b\,\gamma_\mu\,\gamma.\psi = 0 \tag{21}$$

de donde se deduce (I.37)

$$(\gamma.\pi - m_{1/2})\ \gamma.\psi + \frac{2(2m-m_{1/2})}{3m^2} ie\ \gamma.F.\psi = 0 \qquad (22)$$

$m_{1/2}$ y b se relacionan por:

$$m_{1/2} = \frac{4b-1}{2(b-1)} m \qquad b = \frac{m-2m_{1/2}}{2(2m-m_{1/2})} \qquad (23)$$

Combinando (21) y (22)

$$(\gamma.\pi - m)\psi_\mu + \frac{m^2-m^2_{1/2}}{2(2m-m_{1/2})} \gamma_\mu \gamma.\psi - \frac{2m-m_{1/2}}{3m^2} ie\ \gamma_\mu \gamma.F.\psi = 0 \qquad (24)$$

Esta ecuación conserva las ligaduras de la ecuación singular (21). La ecuación característica es

$$D(n,F) = |\gamma.n\ g_\mu^{\ \lambda}| = (n^2)^8 = 0 \qquad (25)$$

(24) es hiperbólica y causal para todos los valores de $F_{\mu\nu}$

Las ecuaciones con $\lambda_1 = 1/2$ y $\gamma.\psi = 0$ son también causales:

$$(\gamma.\pi - m)\psi_\mu - \tfrac{1}{2}\gamma_\mu\ \pi.\psi = 0 \qquad (26)$$

$$D(n,F) = |\gamma.n\ g_\mu^{\ \lambda} - \tfrac{1}{2}\gamma_\mu n^\lambda| = \frac{1}{2^4}(n^2)^8 \qquad (27)$$

El caso $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0$ puede reducirse al anterior realizando una transformación Gauge del campo ψ_μ tal que $\gamma.\psi = 0$. Las ecuaciones (1.25) no singulares con acoplamientos no derivativos son automáticamente hiperbólicas y causales con $n^2 = 0$.

II.4 ACOPLOS TIPO PAULI

Hasta el presente se ha considerado el acoplo mínimo del campo ψ_μ con el potencial vector A_μ. La interacción puede extenderse a acoplos de tipo Pauli con el propio campo electromagnético $F_{\mu\nu}$. La densidad Lagrangiana ampliada a este tipo de acoplamientos es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{min} + \mathcal{L}_{Pauli} \tag{28}$$

y

$$\mathcal{L}_0 = -\left\{ \bar{\psi} \, (i\gamma.\partial - m)\psi - \lambda_1 \bar{\psi}.\gamma \, i\partial.\psi - \lambda_1 \bar{\psi}.i\partial\gamma.\psi + \lambda_2 \bar{\psi}.\gamma \, i\gamma \, \gamma.\psi + m\lambda_3 \bar{\psi}.\gamma \, \gamma.\psi \right\}$$

$$\mathcal{L}_{min} = e \left\{ \bar{\psi}\gamma.A\psi - \lambda_1 \bar{\psi}.\gamma \, A.\psi - \lambda_1 \bar{\psi}.A\,\gamma.\psi + \lambda_2 \bar{\psi}.\gamma\,\gamma.A\,\gamma.\psi \right\}$$

$$\mathcal{L}_{Pauli} = \bar{\psi}.\,T.\,\psi$$

$T_{\mu\nu}$ es el tensor más general construible a partir del tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ (Apéndice B) de forma que $\mathcal{L}_{Pauli}$ conserve la paridad

$$T_{\mu\nu} = i q_2 F_{\mu\nu} + q_4 \, g_{\mu\nu} \, \sigma.F - i q_1^* \sigma_\mu{}^\lambda F_{\lambda\nu} + i q_1 F_\mu{}^\lambda \sigma_{\lambda\nu} + q_3 \gamma^5 \tilde{F}_{\mu\nu} \tag{29}$$

con q_2, q_3, q_4 reales.

Las ecuaciones de campo son

$$(\gamma.\pi - m)\psi_\mu - \lambda_1 \gamma_\mu \pi.\psi - \lambda_1 \pi_\mu \gamma.\psi + \lambda_2 \gamma_\mu \gamma.\pi \gamma.\psi + m\lambda_3 \gamma_\mu \gamma.\psi - T_\mu{}^\lambda \psi_\lambda = 0 \tag{30}$$

En RS la existencia de ligaduras secundarias impone restricciones sobre

$T_{\mu\nu}$. En efecto si $\lambda_1 = 1$ la ligadura primaria se obtiene tomando $\mu = 0$ en (30)

$$\left(\vec{\pi} - h\vec{\alpha}\right).\vec{\psi} - \gamma^0 T_0{}^\lambda \psi_\lambda = 0 \tag{31}$$

Si $T_0^0 \neq 0$ (31) serviría para despejar ψ_0 en función de $\vec{\psi}$ y la teoría tendría 12 grados de libertad. La conservación del número de componentes independientes al conectar el campo externo se logra con un tensor $T_{\mu\nu}$ antisimétrico $\Longrightarrow$ $q_4 = 0$ y q_1 real. $T_{\mu\nu}$ depende de 3 parámetros q_1, q_2 y q_3.

El procedimiento descrito en (II.2) no es directamente aplicable al estudio de la hiperbolicidad de RS-Pauli ya que al sustituir $\gamma.\psi$ y $\pi.\psi$ en (30) dadas por:

$$\gamma.\psi = \frac{2e}{3m^2}\gamma^5\gamma.\tilde{F}.\psi + \frac{1}{3m}\gamma.T.\psi - \frac{2}{3m^2}\pi.T.\psi \tag{32a}$$

$$\pi.\psi = \left(\gamma.\pi + \frac{3}{2}m\right)\gamma.\psi - \frac{1}{2}\gamma.T.\psi \tag{32b}$$

se introducen derivadas de 2° orden. Esto ocurre porque (32a) no es propiamente una ligadura debido al término $\pi.T.\psi$. Shamaly y Capri estudiaron la hiperbolicidad de este acoplo descomponiendo ψ_μ en una componente transversal V_μ $(\pi.V = 0)$ y longitudinal ϕ

$$\psi_\mu = V_\mu + \pi_\mu \phi \tag{33}$$

y hallando un sistema de ecuación acoplada para los campos V_μ y ϕ [26].

Del estudio del determinante característico (20 x 20) de este sistema obtuvieron como conclusión la existencia de velocidades superluminales para todos los valores de q_1, q_2 y q_3 y la imposibilidad de suprimir la inconsistencia de Velo-Zwanziger. Este resultado se obtendrá por otros medios al analizar las relaciones de anticonmutación de ψ_μ .

Si el campo ψ_μ es de 12 grados de libertad no es necesario exigir antisimetría a $T_{\mu\nu}$

Cuando $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_3 \neq 1/4$ la ligadura primaria queda

$$\gamma.\psi + \frac{1}{m(1-4\lambda_3)} \gamma.T.\psi = 0 \qquad (34)$$

Finalmente la invariancia Gauge de la ecuación $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0$ se mantiene si

$$\gamma.T.\psi = 0 \qquad (35)$$

fórmula que se satisface independientemente de ψ si

$$\begin{aligned} q_2 - 2q_4 + iq_1 - 3iq_1^* &= 0 \\ 2q_4 + q_3 + 2iq_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (36)$$

II.5 CAMPO RS* CON ACOPLOS TIPO PAULI

La ecuación de campo es:

$$(\gamma.\pi - m)\psi_\mu + \frac{1}{2}\gamma_\mu \gamma.\pi\, \gamma.\psi + mb\,\gamma_\mu \gamma.\psi - T_\mu{}^\nu \psi_\nu = 0 \qquad (37)$$

siendo $b \neq 1$.

Al contraer con γ^μ y π^μ se obtiene:

$$2\pi.\psi + \gamma.\pi\, \gamma.\psi + (4b-1)m\,\gamma.\psi - \gamma.T.\psi = 0 \qquad (38a)$$

$$(\gamma.\pi - m)\pi.\psi + \frac{1}{2}(\gamma.\pi)^2 \gamma.\psi + mb\,\gamma.\pi\,\gamma.\psi + ie\,\gamma.F.\psi - \pi.T.\psi = 0 \qquad (38b)$$

La ligadura primaria es consecuencia de (37) para $\mu = 0$ y (38a)

$$h\psi^0 - \vec{\pi}.\vec{\psi} - \frac{1-2b}{2} m\gamma.\psi + \gamma_0 T_0{}^{\lambda}\psi_\lambda - \frac{1}{2}\gamma.T.\psi = 0 \tag{39}$$

De (39a,b) se deducen:

$$\left(\gamma.\pi - m_{1/2}\right)\gamma.\psi + \frac{2m-m_{1/2}}{3m^2}\left\{2ie\gamma.F.\psi - m\gamma.T.\psi + \gamma.\pi\gamma.T.\psi - 2\pi.T.\psi\right\} = 0 \tag{40a}$$

$$\pi.\psi - \frac{m_{1/2}(m+m_{1/2})}{2(2m-m_{1/2})}\gamma.\psi - \frac{m+m_{1/2}}{6m}\gamma.T.\psi$$

$$- \frac{2m-m_{1/2}}{6m^2}\left\{2ie\gamma.F.\psi + \gamma.\pi\gamma.T.\psi - 2\pi.T.\psi\right\} = 0 \tag{40b}$$

Utilizando (40a) y (37) se deriva una ecuación no singular

$$\left(\gamma.\pi - m\right)\psi_\mu + \frac{m^2-m_{1/2}^2}{2(2m-m_{1/2})}\gamma_\mu\gamma.\psi + \frac{2m-m_{1/2}}{6m^2}\gamma_\mu\Big\{-2ie\gamma.F.\psi$$

$$+ m\gamma.T.\psi - \gamma.\pi\gamma.T.\psi + 2\pi.T.\psi\Big\} - T_\mu{}^{\lambda}\psi_\lambda = 0 \tag{41}$$

En ausencia de campos externos dicha ecuación es hiperbólica y causal

$$\left(\gamma.p - m\right)\psi_\mu + \frac{m^2-m_{1/2}^2}{2(2m-m_{1/2})}\gamma_\mu\gamma.\psi = 0 \tag{42}$$

El acoplo mínimo tampoco modifica las superficies características pues $n^2 = 0$. Para acoplos típo Pauli el determinante característico es:

$$D(n,F)_{RS*} = \left| \gamma.n\, g_\mu^\lambda + \frac{2m-m1/2}{6m^2}\gamma_\mu\left(2n.T^\lambda - \gamma.n\,\gamma.T^\lambda\right)\right| \quad . \tag{43}$$

El cálculo de (43) es bastante complicado por lo que emplearemos otro método que permite determinar las normales n_μ a las superficies características. Según Madore y Tait [22] las derivadas de una solución de un sistema de ecuaciones hiperbólicas de primer orden sufren una discontinuidad al atravesar las superficies características expresables por

$$\begin{aligned} [\, i\partial_\mu \psi_\nu \,] &= n_\mu K_\nu \\ [\, \psi_\mu \,] &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

donde K_ν son funciones continuamente diferenciables.

Tomando la discontinuidad en (37)

$$\gamma.n\, K_\mu + \frac{1}{2}\gamma_\mu\, \gamma.n\, \gamma.K = 0 \tag{45}$$

y multiplicando por $\gamma.n$ con $n^2 \neq 0$, puesto que estamos interesados en los modos de propagación extraordinarios, se tiene

$$K_\mu = -\frac{1}{2n^2}\,\gamma.n\,\gamma_\mu\,\gamma.n\,\gamma.K \tag{46}$$

o bien definiendo $R = -\frac{1}{2n^2}\gamma.n\,\gamma.K$

$$K_\mu = \gamma.n\,\gamma_\mu\, R \tag{47}$$

Análogamente de (41)

$$\gamma.n\, K_\mu + \frac{2m-m1/2}{6m^2}\gamma_\mu\left(2\,n.T.K - \gamma.n\,\gamma.T.K\right) = 0 \tag{48}$$

que conduce en el caso particular (47) a:

$$\left[n^2 + \frac{2m - m'/_2}{6m^2} \left(2\, n.T^\lambda - \gamma.n\, \gamma.T^\lambda \right) \gamma.n\, \gamma_\lambda \right] R = 0 \tag{49}$$

La matriz 4 x 4 que multiplica a R ha de ser singular si R ≠ 0, obteniéndose

$$D(n,F)_{RS^*} = (n^2)^4 \left| n^2 + \frac{2m - m'/_2}{6m^2} \left(2\, n.T^\lambda - \gamma.n\, \gamma.T^\lambda \right) \gamma.n\, \gamma_\lambda \right| \tag{50}$$

(50) se escribe teniendo en cuenta (29)

$$D(n,F)_{RS^*} = (n^2)^4 \left| n^2 + \sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right| = (n^2)^4 \left[(n^4 - 2 G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})^2 + (2 G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu})^2 \right] \tag{51}$$

donde

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= p\, n^2 F_{\mu\nu} + q\, (n_\mu F_{\nu\lambda} - n_\nu F_{\mu\lambda}) n^\lambda \\ \tilde{G}_{\mu\nu} &= (p-q)\, n^2 \tilde{F}_{\mu\nu} - q\, (n_\mu \tilde{F}_{\nu\lambda} - n_\nu \tilde{F}_{\mu\lambda}) n^\lambda \end{aligned} \tag{52}$$

$$p = \frac{2m - m'/_2}{6m^2} \left(q_2 + 2q_4 + i(q_1 - q_1^*) - q_3 \right)$$

$$q = \frac{2m - m'/_2}{3m^2}\, i\, (q_1 - q_1^*)$$

Y finalmente

$$D(n,F)_{RS^*} = (n^2)^6 \left[\left((1 - 2p^2 F^2) n^2 + 4q(2p-q)(n.F)^2 \right)^2 + \left(2p(p-q)\, n^2\, F.\tilde{F} \right)^2 \right] = 0 \tag{53}$$

La superficie t = cte es característica si $n_\mu = n(1,\vec{0})$ es solución de (53) de donde:

$$\lambda + 4p^2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + 4q(q - 2p)\vec{E}^2 = 0 \tag{54a}$$

$$p(p - q)\,\vec{E}.\vec{B} = 0 \tag{54b}$$

La propagación es causal si no existe ningún sistema de referencia en el cual se satisfagan las condiciones (54). Distinguimos dos casos: 1) $p = 0 \longrightarrow$ propagación causal. 2) $p \neq 0 \Longrightarrow q(q - 2p) > 0 \longrightarrow$ propagación causal limitada a campos que verifican $\vec{E}.\vec{B} = 0$.

§III. LOS CAMPOS RS* Y RS**

III.1 CAMPO RS* LIBRE

Las soluciones de la ecuación RS* libre con $\lambda_1 = 0$

$$\left(i\gamma.\partial - m\right)\psi_\mu + \frac{1}{2}\gamma_\mu\, i\gamma.\partial\, \gamma.\psi + mb\,\gamma_\mu\, \gamma.\psi = 0 \tag{1}$$

del tipo ondas planas

$$\psi_\mu(x) = W_\mu(p)\, e^{-i\,p.x} \tag{2}$$

verifican:

$$\left(\gamma.p - m\right) W_\mu(p) + \frac{1}{2}\gamma_\mu\, \gamma.p\, \gamma.W + mb\,\gamma_\mu\, \gamma.W = 0 \tag{3}$$

(3) es un sistema compatible de ecuaciones algebraicas si

$$Q(p) = \left|\, (\gamma.p - m)\, g_\mu^{\ \lambda} + \frac{1}{2}\gamma_\mu\, \gamma.p\, \gamma^\lambda + mb\,\gamma_\mu \gamma^\lambda \right| = 0 \tag{4}$$

Las raices del polinomio Q(P) conducen al espectro de masas de (1)

$$Q(p) = \left(2(1-b)m\right)^4 \left(p^2 - m^2\right)^4 \left(p^2 - \left(\frac{m(1-4b)}{2(1-b)}\right)^2\right)^2 \tag{5}$$

formado por $\left\{ m^2 ,\ \left(\frac{m\,(1-4b)}{2(1-b)}\right)^2 \right\}$ (b ≠ 1). Si b = ± 1/2 ambas masas coinciden.

Soluciones $p^2 = m^2$.

A partir de (3) se deduce

$$(\gamma . p - m_{1/2})\, \gamma . W(p) = 0 \tag{6}$$

siendo $m_{1/2} = \frac{4b-1}{2(b-1)} m$

Supongamos sin pérdida de generalidad $m_{1/2} \neq m$. Multiplicando (6) por $\gamma . p + m_{1/2}$

$$\left(m^2 - m_{1/2}^2\right) \gamma . W = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma . W = 0 \tag{7}$$

Análogamente a (6) se tiene

$$p . W - \frac{m_{1/2}\,(m + m_{1/2})}{2\,(2m - m_{1/2})}\, \gamma . W = 0 \tag{8}$$

luego

$$p . W(p) = 0 \tag{9}$$

Introduciendo (7) y (9) en (3) se deduce

$$(\gamma . p - m)\, W_\mu(p) = 0 \tag{10}$$

(10), (7) y (9) son las ecuaciones de RS para spin 3/2.

Soluciones $p^2 = m_{1/2}^2$

Según (6) $\gamma . W$ es un spinor de Dirac de masa $m_{1/2}$, al cual le corresponde un spinor-vector W dado por

$$W_\mu(p) = \frac{1}{2(2m - m_{1/2})} (\gamma . p + m)\gamma_\mu \gamma . W = \frac{1}{2m - m_{1/2}} \left(p_\mu + \frac{m - m_{1/2}}{2} \gamma_\mu\right) \gamma . W \tag{11}$$

donde $p^{\mu} = \left(\pm \sqrt{\vec{p}^2 + m_{1/2}^2}\, , \vec{p} \right)$

La ecuación (6) admite 4 soluciones linealmente independientes que conducen a otras tantas soluciones para $W_\mu(p)$ y que generan el espacio base de una representación de spin 1/2. Mostraremos que dicho espacio es estable bajo una transformación de Lorentz

$$W'_\mu(p) = \Lambda_\mu{}^\nu \; S(\Lambda)\, W_\nu(\Lambda^{-1} p) \qquad (12)$$

En efecto escribiendo (11)

$$W_\mu(p) = \left(p_\mu + \frac{m - m_{1/2}}{2} \gamma_\mu \right) \phi(p) \qquad (13)$$

se tiene

$$W'_\mu(p) = \Lambda_\mu{}^\nu \, S(\Lambda) \left(\Lambda^{-1}{}_\nu{}^\lambda \, p_\lambda + \frac{m - m_{1/2}}{2} \gamma_\nu \right) \phi(\Lambda^{-1} p) \qquad (14)$$

y puesto que

$$S(\Lambda^{-1}) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \, \gamma^\nu$$

se deduce

$$W'_\mu(p) = \left(p_\mu + \frac{m - m_{1/2}}{2} \gamma_\mu \right) S(\Lambda)\, \phi(\Lambda^{-1} p) = \left(p_\mu + \frac{m - m_{1/2}}{2} \gamma_\mu \right) \phi'(p) \qquad (15)$$

Cuando $m_{1/2} = m$ se comprueba que

$$W_\mu(p) = \frac{p_\mu}{m} \gamma . W(p) \qquad (16)$$

es solución de (3).

La conclusión de lo anterior es que toda solución $W_\mu(p)$ de (3) se descompone en suma de una componente de spin 3/2: $W_\mu^{3/2}(p)$ y una de spin 1/2 : $W_\mu^{1/2}(p)$

$$W_\mu(p) = W_\mu^{3/2}(p) + W_\mu^{1/2}(p) \tag{17}$$

Descomposición que como es fácil probar es única.

En el espacio de posiciones se obtiene una expresión similar a (17).

$$\psi_\mu(x) = \psi_\mu^{3/2}(x) + \psi_\mu^{1/2}(x) \tag{18}$$

siendo

$$\psi_\mu^{3/2}(x) = \int_{\Omega(m)} d\sigma_{3/2}(p)\; W_\mu^{3/2}(p)\; e^{-i\,p.x} \tag{19a}$$

$$\psi_\mu^{1/2}(x) = \int_{\Omega(m_{1/2})} d\sigma_{1/2}(p)\; W_\mu^{1/2}(p)\; e^{-i\,p.x} \tag{19b}$$

y $d\sigma_l(p) = \dfrac{d^3p}{2\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_l^2}}$ (l = 3/2, 1/2) la medida invariante sobre los hiperboloides de masa $\Omega(m_l)$.

Se comprueba inmediatamente a partir de (6), (7), (10) y (11)

$$(i\,\gamma.\partial - m)\,\psi_\mu^{3/2}(x) = 0 \tag{20a}$$

$$\gamma^\mu\,\psi_\mu^{3/2}(x) = 0 \tag{20b}$$

$$\psi_\mu^{1/2}(x) = \frac{1}{2m - m_{1/2}}\left(i\partial_\mu + \frac{m - m_{1/2}}{2}\gamma_\mu\right)\gamma.\psi^{1/2}(x) \tag{20c}$$

$$\left(i\,\gamma.\partial - m_{1/2}\right)\gamma.\psi^{1/2} = 0 \tag{20d}$$

Obsérvese la similitud de la descomposición (18) con la que se opera entre las componentes transversal (spin 1) $A_{\mu T}$ y escalar (spin 0) $\partial.A$ de un campo vectorial masivo A_μ [37]

$$A_\mu(x) = A_{\mu T}(x) + \frac{1}{a\lambda^2}\partial_\mu(\partial.A(x)) \tag{21}$$

verificándose las ecuaciones

$$(\Box - \lambda^2)\, A_{\mu T}(x) = 0 \tag{22a}$$

$$\partial^\mu A_{\mu T}(x) = 0 \tag{22b}$$

$$(\Box - a\lambda^2)\, \partial.A(x) = 0 \tag{22c}$$

(21) es válida aún en interacción, lo cual no puede afirmarse de (18).

Paralelamente a la descomposición del campo libre $\psi_\mu(x)$ en sus componentes irreducibles de masa y spin definido, se induce una descomposición de las magnitudes físicas deducidas via Teorema de Noether. Este afirma la existencia de cantidades conservadas [35]

$$F(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\mu\, G^\mu \tag{23}$$

bajo transformaciones de campos y coordenadas que dejan el Lagrangiano $\mathcal{L}(x)$ invariante

$$\delta\psi_\mu = \delta_0\psi_\mu + \delta x^\lambda \partial_\lambda \psi_\mu \tag{24}$$

Es decir $F(\sigma)$ independiente de la superficie tipo espacio σ de integración y donde

$$G^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_\lambda)}\,\delta_0\psi_\lambda + \mathcal{L}\,\delta x^\mu \tag{25}$$

Escribiendo $\mathcal{L}_{RS^*}$ libre:

$$\mathcal{L}_{RS^*} = -\left\{ \bar{\psi}_\lambda (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^\lambda + \frac{1}{2}\bar{\psi}\cdot\gamma\, i\gamma^\mu\partial_\mu\, \gamma\cdot\psi + m b\, \bar{\psi}\cdot\gamma\, \gamma\cdot\psi \right\} \tag{26}$$

se obtiene el momento canónico

$$\pi^{\lambda\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{RS^*}}{\partial(\partial_\mu \psi_\lambda)} = -i\left(\bar{\psi}^\lambda\gamma^\mu + \frac{1}{2}\bar{\psi}\cdot\gamma\, \gamma^\mu\gamma^\lambda \right) \tag{27}$$

Si $\psi_\mu(x)$ es solución de la ecuación RS* entonces $\mathcal{L}_{RS^*} = 0$ y

$$G^\mu(x) = -i\left(\bar{\psi}^\lambda\gamma^\mu + \frac{1}{2}\bar{\psi}\cdot\gamma\, \gamma^\mu\gamma^\lambda \right)\delta_0\psi_\lambda \tag{28}$$

esta expresión coincide con la corriente conservada por (20)

$$J^\mu(\psi_a, \psi_b) = -\left(\bar{\psi}_a^\lambda\gamma^\mu\psi_{b\lambda} + \frac{1}{2}\bar{\psi}_a\cdot\gamma\, \gamma^\mu\, \gamma\cdot\psi_b \right) \tag{29}$$

siendo ψ_a y ψ_b dos soluciones de RS*

$$G^\mu(x) = i\, J^\mu\left(\psi(x), \delta_0\psi(x)\right) \tag{30}$$

Aplicando (18) a ψ_a y ψ_b

$$\psi^\mu_{a,b}(x) = \psi^{3/2\,\mu}_{a,b}(x) + \psi^{1/2\,\mu}_{a,b}(x) \tag{31}$$

se deduce:

$$J^\mu = J^\mu_{3/2} + J^\mu_{1/2} + J^\mu_{3/2,1/2} \tag{32}$$

donde

$$J^\mu_{3/2} = -\bar{\psi}_a^{3/2\,\lambda}\gamma^\mu\psi^{3/2}_{b\lambda} \tag{33a}$$

$$J^{\mu}_{1/2} = - \frac{\Box + 3m^2}{2(2m - m_{1/2})^2} (\bar{\psi}_a . \gamma \gamma^{\mu} \gamma . \psi_b) + \frac{m - m_{1/2}}{(2m - m_{1/2})^2} \partial_{\lambda} (\bar{\psi}_a . \gamma \gamma^{\mu} \gamma . \psi_b) \qquad (33b)$$

$$J^{\mu}_{3/2,1/2} = - \frac{1}{2m - m_{1/2}} \Big\{ i \partial^{\lambda} (\bar{\psi}^{3/2}_{a\lambda} \gamma^{\mu} \gamma . \psi_b - \bar{\psi}_a . \gamma \gamma^{\mu} \psi^{3/2}_{b\lambda}) +$$

$$+ (m - m_{1/2}) \Big(\bar{\psi}^{3/2\,\mu}_a \gamma . \psi_b + \bar{\psi}_a . \gamma \psi^{3/2\,\mu}_b \Big) \Big\} \qquad (33c)$$

habiendo hecho uso en (33b) de la identidad de Gordon [33]

$$\bar{\psi}_a . \gamma \, i \overleftrightarrow{\partial}^{\mu} \gamma . \psi_b = 2m_{1/2} \bar{\psi}_a . \gamma \gamma^{\mu} \gamma . \psi_b - \partial_{\lambda} (\bar{\psi}_a . \gamma \, \sigma^{\mu\lambda} \gamma . \psi_b) \qquad (34)$$

Las traslaciones, las transformaciones de Lorentz y las de fase verifican

$$(\delta_0 \psi)^{3/2} = \delta_0 (\psi^{3/2}) \quad , \quad (\delta_0 \psi)^{1/2} = \delta_0 (\psi^{1/2}) \qquad (35)$$

de manera que F(t) (σ : t = cte) es igual a

$$F = i \int d^3x \; J^0 (\psi(x) \, , \, \delta_0 \psi(x)) = F_{3/2} + F_{1/2} \qquad (36a)$$

$$F_{3/2} = - i \int d^3x \; \psi^{3/2\,+}_{\lambda} \; \delta_0 \psi^{3/2\,\lambda} \qquad (36b)$$

$$F_{1/2} = i \frac{-3m^2}{2(2m - m_{1/2})^2} \int d^3x \; (\gamma . \psi)^{\dagger} \, \delta_0 (\gamma . \psi) \qquad (36c)$$

El término de interferencia $J^0_{3/2,1/2}$ no contribuye a la integral (36a), para campos que se anulan asintóticamente, por la aplicación del Teorema de Gauss.

La invariancia bajo transformaciones de fase

$$\delta_0 \psi_\mu(x) = -ie\theta\, \psi_\mu(x) \tag{37}$$

implica la conservación de la carga $Q \equiv F/\theta$

$$Q = Q_{3/2} + Q_{1/2} \tag{38a}$$

$$Q_{3/2} = -e\int d^3x\, \psi_\lambda^{3/2\dagger}\, \psi^{3/2\lambda} = e\int d^3x\, \psi_{3/2}^{i\dagger}\,(\delta_{ij} - \alpha_i\alpha_j)\,\psi_{3/2}^{j} \tag{38b}$$

$$Q_{1/2} = -e\,\frac{3m^2}{2(2m-m_{1/2})^2}\int d^3x\,(\gamma.\psi)^\dagger(\gamma.\psi) \tag{38c}$$

La conservación de la energía-momento P_μ es consecuencia de la invariancia bajo traslaciones espacio-temporales

$$\delta_0 \psi_\mu = -\epsilon^\lambda\, \partial_\lambda \psi_\mu \tag{39a}$$

$$F = -\epsilon^\mu\, P_\mu \tag{39b}$$

Resultando de (36b)

$$P^\mu = P^\mu_{3/2} + P^\mu_{1/2} \tag{40a}$$

$$P^\mu_{3/2} = -\int d^3x\, \psi_\lambda^{3/2\dagger}\, i\partial^\mu\, \psi^{3/2\lambda} \tag{40b}$$

$$P^\mu_{1/2} = -\frac{3m^2}{2(2m-m_{1/2})^2}\int d^3x\,(\gamma.\psi)^\dagger\, i\partial^\mu(\gamma.\psi) \tag{40c}$$

Mediante el procedimiento standard[38]puede calcularse las densidades de energía-momento canónico $\Theta_{\mu\nu}^{can}$ y simétrica $\Theta_{\mu\nu}^{sim}$

$$\theta_{\mu\nu}^{sim} = \theta_{\mu\nu}^{can} + \partial^{\lambda} f_{\lambda\mu\nu} \tag{41a}$$

$$\theta_{\mu\nu}^{can} = -\frac{i}{2}\, \overline{\Psi}\, \gamma_\mu\, \partial_\nu \Psi - \frac{i}{4}\, \overline{\Psi}.\gamma\, \gamma_\mu\, \partial_\nu\, \gamma.\Psi + h.c. \tag{41b}$$

$$f_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\, (R_{\lambda\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda} + R_{\nu\mu\lambda}) \tag{41c}$$

siendo $R_{\mu\nu\lambda}$ la densidad de momento angular de spin

$$R_{\lambda\mu\nu} = -\frac{i}{2}\left(\overline{\Psi}_\mu\, \gamma_\lambda\, \Psi_\nu - \overline{\Psi}_\nu\, \gamma_\lambda\, \Psi_\mu \right) - \frac{1}{4}\, \overline{\Psi}_\rho\, \gamma_\lambda\, \sigma_{\mu\nu}\, \Psi^\rho$$

$$- \frac{1}{8}\, \overline{\Psi}.\gamma\, \gamma_\lambda\, \sigma_{\mu\nu}\, \gamma.\Psi + h.c. \tag{42}$$

A partir de (41b) y considerando (31) se obtiene:

$$\theta_{\mu\nu}^{can} = \theta_{\mu\nu}^{3/2} + \theta_{\mu\nu}^{1/2} + \theta_{\mu\nu}^{(3/2,1/2)} \tag{43a}$$

$$\theta_{\mu\nu}^{1/2} = -\frac{i}{2}\, \overline{\Psi}^{3/2}\, \gamma_\mu\, \partial_\nu\, \Psi^{3/2} + h.c. \tag{43b}$$

$$\theta_{\mu\nu}^{1/2} = -\frac{i\,(\Box + 3m^2)}{4(2m - m_{1/2})^2}\, \overline{\Psi}.\gamma\, \gamma_\mu\, \partial_\nu\, \gamma.\Psi$$

$$- \frac{i\,(m - m_{1/2})}{(2m - m_{1/2})^2}\, \partial^\lambda \left(\overline{\Psi}.\gamma\, \sigma_{\mu\lambda}\, \partial_\nu\, \gamma.\Psi \right) + h.c. \tag{43c}$$

$$\theta_{\mu\nu}^{(3/2,1/2)} = \frac{-i}{2(2m - m_{1/2})} \Big\{ i\,\partial^\lambda \left(\overline{\Psi}_\lambda^{3/2}\, \gamma_\mu\, \partial_\nu\, \gamma.\Psi - \overline{\Psi}.\gamma\, \gamma_\mu\, \partial_\nu\, \Psi_\lambda^{3/2} \right) +$$

$$+ (m - m_{1/2}) \left(\overline{\Psi}_\mu^{3/2}\, \partial_\nu\, \gamma.\Psi + \overline{\Psi}.\gamma\, \partial_\nu\, \Psi_\mu^{3/2} \right) \Big\} + h.c. \tag{43d}$$

El momento canónico P^μ dado por (40) coincide con el calculado a través de $\theta_{\mu\nu}^{can}$

$$P_\mu = \int d^3x \; \theta^{can}_{o\mu} \qquad (44)$$

lo que muestra la equivalencia de las dos maneras de hallar los observables.

La densidad de momento angular intrínseco para una solución estática $\psi_\mu = \psi_\mu^{3/2} + \psi_\mu^{1/2}$ se determina de (42)

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,R^{oij} = \psi_{3/2}^{i\,+}\left(-i\,\varepsilon_{ijk} + \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\Sigma_k\right)\psi_{3/2}^{j}$$
$$- \frac{3m^2}{2(2m-m_{1/2})^2}\left(\gamma.\psi_{1/2}\right)^{+}\,\frac{1}{2}\,\Sigma_k\left(\gamma.\psi_{1/2}\right) \qquad (45)$$

Los términos cruzados desaparecen al tener en cuenta

$$\gamma^k\sigma^{ij} - \sigma^{ij}\gamma^k = 2i\,\left(\delta^{jk}\gamma^i - \delta^{ik}\gamma^j\right) \qquad (46)$$

Obsérvese que las matrices que aparecen en (45)

$$\left(S_k^{(3/2)}\right)_{ij} = -i\,\varepsilon_{ijk} + \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\Sigma_k \qquad (47a)$$

$$S_k^{(1/2)} = \frac{1}{2}\,\Sigma_k \qquad (47b)$$

corresponden a representaciones de spin 3/2 y 1/2 de los generadores del grupo de rotaciones.

El desarrollo de Fourier de $\psi_\mu(x)$ permite escribir Q y P en el espacio de momentos [33]

$$\psi_\mu(x) = \sum_\ell \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m_\ell}{E_\ell}}\,\sum_\lambda\left(a_\ell(p,\lambda)\,u^\ell_\mu(p,\lambda)\,e^{-ip.x} + b^*_\ell(p,\lambda)\,v^\ell_\mu(p,\lambda)\,e^{ip.x}\right) \qquad (48)$$

u^1 y v^1 están definidos por

$$(\gamma . p - m)\, u_\mu^{3/2}(p,\lambda) = 0 \tag{49a}$$

$$\gamma^\mu\, u_\mu^{3/2}(p,\lambda) = 0 \tag{49b}$$

$$(\gamma . p + m)\, v_\mu^{3/2}(p,\lambda) = 0 \tag{49c}$$

$$\gamma^\mu\, v_\mu^{3/2}(p,\lambda) = 0 \tag{49d}$$

$$u_\mu^{1/2}(p,\lambda) = \sqrt{\frac{2}{3m^2}}\left(p_\mu + \frac{m - m_{1/2}}{2}\gamma_\mu\right) u^{1/2}(p,\lambda) \tag{49e}$$

$$(\gamma . p - m)\, u^{1/2}(p,\lambda) = 0 \tag{49f}$$

$$v_\mu^{1/2}(p,\lambda) = \sqrt{\frac{2}{3m^2}}\left(-p_\mu + \frac{m - m_{1/2}}{2}\gamma_\mu\right) v^{1/2}(p,\lambda) \tag{49g}$$

$$(\gamma . p + m)\, v^{1/2}(p,\lambda) = 0 \tag{49h}$$

λ indica la helicidad de cada spinor-vector.

Se verifican las relaciones siguientes [34,39]:

<u>Ortogonalidad</u>:

$$\bar{u}_\mu^{3/2}(p,\lambda)\, u^{3/2,\mu}(p,\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'} = -\bar{v}_\mu^{3/2}(p,\lambda)\, v^{3/2,\mu}(p,\lambda') \tag{50a}$$

$$u_\mu^{3/2\,+}(p,\lambda)\, u^{3/2,\mu}(p,\lambda') = -\frac{E_{3/2}}{m}\delta_{\lambda\lambda'} = v_\mu^{3/2\,+}(p,\lambda)\, v^{3/2,\mu}(p,\lambda) \tag{50b}$$

$$\bar{V}^{3/2}_{\mu}(p,\lambda)\, u^{3/2\,\mu}(p,\lambda') = 0 = V^{3/2\dagger}_{\mu}(p,\lambda)\; u^{3/2\,\mu}(-p,\lambda') \tag{50c}$$

$$\bar{u}^{1/2}(p,\lambda)\; u^{1/2}(p,\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} = -\bar{V}^{1/2}(p,\lambda)\; V^{1/2}(p,\lambda') \tag{50d}$$

$$u^{1/2\dagger}(p,\lambda)\; u^{1/2}(p,\lambda') = \frac{E_{1/2}}{m_{1/2}}\,\delta_{\lambda\lambda'} = V^{1/2\dagger}(p,\lambda)\; V^{1/2}(p,\lambda') \tag{50e}$$

$$\bar{V}^{1/2}(p,\lambda)\; u^{1/2}(p,\lambda') = 0 = V^{1/2\dagger}(p,\lambda)\; u^{1/2}(-p,\lambda') \tag{50f}$$

<u>Completitud:</u>

$$-\sum u^{3/2}_{\mu}(p,\lambda)\,\bar{u}^{3/2}_{\nu}(p,\lambda) = \frac{\not{p}+m}{2m}\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu - \frac{1}{3m}(\gamma_\mu p_\nu - p_\mu\gamma_\nu) - \frac{2}{3m^2}p_\mu p_\nu\right) \tag{51a}$$

$$\sum V^{3/2}_{\mu}(p,\lambda)\,\bar{V}^{3/2}_{\nu}(p,\lambda) = \frac{-\not{p}+m}{2m}\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu + \frac{1}{3m}(\gamma_\mu p_\nu - p_\mu\gamma_\nu) - \frac{2}{3m^2}p_\mu p_\nu\right) \tag{51b}$$

$$\sum_{\lambda} u^{1/2}(p,\lambda)\,\bar{u}^{1/2}(p,\lambda) = \frac{\not{p}+m_{1/2}}{2m_{1/2}} \tag{51c}$$

$$-\sum_{\lambda} V^{1/2}(p,\lambda)\,\bar{V}^{1/2}(p,\lambda) = \frac{-\not{p}+m_{1/2}}{2m_{1/2}} \tag{51d}$$

Q y P_μ dados en (38) y (40) son:

$$Q = e\sum_{\ell}\int d^3p\sum_{\lambda}\varepsilon_\ell\left(a^*_\ell(p,\lambda)\,a_\ell(p,\lambda) + b_\ell(p,\lambda)\,b^*_\ell(p,\lambda)\right) \tag{52a}$$

$$P^\mu = \sum_{\ell}\int d^3p\sum_{\lambda}\varepsilon_\ell\, p^\mu\left(a^*_\ell(p,\lambda)\,a_\ell(p,\lambda) - b_\ell(p,\lambda)\,b^*_\ell(p,\lambda)\right) \tag{52b}$$

donde $\varepsilon_{3/2} = +1$ y $\varepsilon_{1/2} = -1$.

La existencia de una métrica indefinida se manifiesta en la aparición de ϵ_ℓ en la expresión de los observables en el espacio de momentos, y tiene importantes consecuencias en la cuantificación de los campos.

III.2 CAMPO RS* EN ACOPLO MINIMO

Las componentes irreducibles $\psi^{3/2}$ y $\psi^{1/2}$ evolucionan en ausencia de otros campos de forma independiente. El efecto de la interacción es conectar ambas componentes entre sí, contrariamente a lo que ocurre en el campo vectorial A_μ acoplado a una corriente externa. Es fácil mostrar este hecho a partir de la ecuación (II.22)

$$\left(\gamma.\pi - m^{1/2}\right)\gamma.\psi + \frac{2(2m-m^{1/2})}{3m^2}\, ie\, \gamma.F.\psi = 0 \tag{53}$$

de la que se deduce

$$\partial_\mu\left(\bar{\psi}.\gamma\, \gamma^\mu\, \gamma.\psi\right) = -\frac{2(2m-m^{1/2})}{3m^2}\, e\left(\bar{\psi}.\gamma\,\gamma.F.\psi - \bar{\psi}.F.\gamma\,\gamma.\psi\right) \tag{54}$$

Integrando (54) se obtiene la variación total de la carga del campo de spin 1/2 en un proceso de scattering para un campo electromagnético externo localizado

$$Q^{out}_{1/2} - Q^{in}_{1/2} = \frac{e^2}{2m-m^{1/2}}\int d^4x\left(\bar{\psi}.\gamma\,\gamma.F.\psi - \bar{\psi}.F.\gamma\,\gamma.\psi\right) \tag{55}$$

Dado el carácter indefinido de la carga total $Q = Q^{out}_{3/2} + Q^{out}_{1/2} = Q^{in}_{3/2} + Q^{in}_{1/2}$, se ve por (55) que no existe cota inferior sobre $Q^{out}_{1/2} \leq 0$ o cota superior sobre $Q^{out}_{3/2} \geq 0$, no siendo posible una interpretación en términos probabilistas de $J_o(x,t) = J_o^{3/2} + J_o^{1/2}$ o bien de $|J_o^{3/2}| + |J_o^{1/2}|$. En el primer caso nos veríamos obligados a definir probabilidades negativas (¿?), mientras que en el segundo la densidad de probabilidad definida por $|J_o^{3/2}| + |J_o^{1/2}|$ no se conserva en la evolución.

A partir de la ecuación (II.24) se puede deducir una expresión análoga a (54)

$$(\gamma.\pi - m)\psi_\mu + \frac{m^2 - m_{1/2}^2}{2(2m - m_{1/2})}\gamma_\mu \gamma.\psi - \frac{2m - m_{1/2}}{3m^2} ie \gamma_\mu \gamma.F.\psi = 0 \tag{56}$$

$$\partial_\mu (\bar{\psi}_\lambda \gamma^\mu \psi^\lambda) = \frac{2m - m_{1/2}}{3m^2} e (\bar{\psi}.\gamma\, \gamma.F.\psi - \bar{\psi}.F.\gamma\, \gamma.\psi) \tag{57}$$

(54) junto con (57) restauran la conservación de la carga total

$$\partial_\mu (\bar{\psi}_\lambda \gamma^\mu \psi^\lambda + \tfrac{1}{2}\, \bar{\psi}.\gamma\, \gamma^\mu\, \gamma.\psi) = 0 \tag{58}$$

Se explica entonces porque (18) no es válida en interacción.

El objetivo de esta sección es mostrar que el campo ψ_μ incluso en presencia de un potencial vector electromagnético se puede escribir en la forma:

$$\psi_\mu = V_\mu + \left(\pi_\mu + \frac{m - m_{1/2}}{2}\gamma_\mu\right)\phi \tag{59}$$

eligiendo convenientemente V_μ y ϕ, que en el caso libre se han de convertir en

$$V_\mu = \psi_\mu^{3/2} \qquad \text{y} \qquad \phi = \frac{1}{2m - m_{1/2}}\, \gamma.\psi$$

Busquemos las ecuaciones que satisfacen V_μ y ϕ a partir de las ecuaciones (53), (56) y

$$\pi.\psi - \frac{m_{1/2}(m + m_{1/2})}{2(2m - m_{1/2})}\gamma.\psi - \frac{2m - m_{1/2}}{3m^2} ie\, \gamma.F.\psi = 0 \tag{60}$$

Introduciendo (59) en (53) y (60) se tiene

$$\left(\gamma.\pi - m_{1/2}\right)\gamma.V + \frac{2(2m - m_{1/2})}{3m^2} ie \gamma.F.V + (\gamma.\pi - m_{1/2})\left(\gamma.\pi + 2(m - m_{1/2})\right)\phi$$

$$+ \frac{2(2m - m_{1/2})}{3m^2} ie \left(\gamma.F.\pi - i\, \frac{m - m_{1/2}}{2}\, \sigma.F\right)\phi = 0 \tag{61a}$$

$$\pi \cdot V - \frac{m_{1/2}(m+m_{1/2})}{2(2m-m_{1/2})}\,\gamma . V - \frac{2m-m_{1/2}}{3m^2}\, ie\, \gamma . F . V + \left[(\gamma . \pi)^2 + \frac{m(m-2m_{1/2})}{2m-m_{1/2}}\,\gamma . \pi + \frac{m_{1/2}(m_{1/2}^2-1)}{2m-m_{1/2}}\right]\phi$$

$$- \frac{2m-m_{1/2}}{3m^2}\, ie\, \gamma . F . \pi\, \phi + \frac{m^2+3mm_{1/2}-m_{1/2}^2}{6m^2}\, e\ \sigma . F\, \phi = 0 \qquad (61b)$$

Restando (61a) y (61b) desaparece el término $(\gamma . \pi)^2 \phi$

$$\gamma . \pi\ \gamma . V - \pi . V - \frac{3m_{1/2}(m-m_{1/2})}{2(2m-m_{1/2})}\,\gamma . V + \frac{ie}{m^2}(2m-m_{1/2})\,\gamma . F . V$$

$$+ \frac{3(m-m_{1/2})^2}{2m-m_{1/2}}(\gamma . \pi - m_{1/2})\phi + \frac{ie}{m^2}(2m-m_{1/2})\,\gamma . F . \pi\,\phi + \frac{e}{2m^2}(m^2-3mm_{1/2}+m_{1/2}^2)\,\sigma . F\,\phi = 0 \qquad (62)$$

Si $F_{\mu\nu} = 0$ y $\gamma . V = p . V = 0$ $\Longrightarrow$ (62) es una ecuación de Dirac de masa $m_{1/2}$ para el bispinor ϕ.

Si $F_{\mu\nu} \neq 0$ impondremos a (62) el que sea una ecuación de primer orden en el campo ϕ.

Definamos Ω_1 y Ω_2 por

$$\gamma . V = a_1\, \gamma . F . V + a_2\, \gamma . F . \pi\, \phi + a_3\, \sigma . F\, \phi + \Omega_1 \qquad (63a)$$

$$\pi . V - \gamma . \pi\ \gamma . V = b_1\, \gamma . F . V + b_2\, \gamma . F . \pi\,\phi + b_3\, \sigma . F\,\phi + \Omega_2 \qquad (63b)$$

y escribamos (62) en función de Ω_1 y Ω_2

$$(\gamma.\pi - m'/_2)\phi + \frac{2m-m'/_2}{3(m-m'/_2)^2}\left[\left((2m-m'/_2)\frac{ie}{m^2} - \frac{3m'/_2(m-m'/_2)}{2(2m-m'/_2)}a_1 - b_1\right)\gamma.F.V + \right.$$

$$\left. + \left((2m-m'/_2)\frac{ie}{m^2} - \frac{3m'/_2(m-m'/_2)}{2(2m-m'/_2)}a_2 - b_2\right)\gamma.F.\pi\,\phi + \left(\frac{m^2-3mm'/_2+m'^2/_2}{2}e - \frac{3m'/_2(m-m'/_2)}{2(2m-m'/_2)}a_3 - b_3\right)\sigma.F\phi\right]$$

$$-\left(\frac{m'/_2}{2(m-m'/_2)}\Omega_1 + \frac{2m-m'/_2}{3(m-m'/_2)^2}\Omega_2\right) = 0 \qquad (64)$$

Si se sustituye $(\gamma.\pi - m'/_2)\,\phi$ dada por (64) en (61a) se obtiene:

$$(A_1\gamma.\pi + A_2)\,\gamma.F.V + (A_3\gamma.\pi + A_4)\gamma.F.\pi\,\phi + (A_5\gamma.\pi + A_6)\,\sigma.F\phi$$

$$+ \frac{2-3\alpha}{2(1-\alpha)}\gamma.\pi\,\Omega_1 + \frac{2-\alpha}{3(1-\alpha)^2}(\gamma.\pi + 2(1-\alpha))\,\Omega_2 = 0 \qquad (65)$$

donde

$$A_1 = a_1 - \frac{2-\alpha}{3(1-\alpha)^2}\left((2-\alpha)ie - \frac{3(1-\alpha)\alpha}{2(2-\alpha)}a_1 - b_1\right)$$

$$A_2 = -\alpha a_1 + \frac{2(2-\alpha)}{3}ie - \frac{2(2-\alpha)}{3(1-\alpha)}\left((2-\alpha)ie - \frac{3(1-\alpha)\alpha}{2(2-\alpha)}a_1 - b_1\right)$$

$$A_3 = a_2 - \frac{2-\alpha}{3(1-\alpha)^2}\left((2-\alpha)ie - \frac{3(1-\alpha)\alpha}{2(2-\alpha)}a_2 - b_2\right)$$

$$A_4 = -\alpha a_2 + \frac{2(2-\alpha)}{3}ie - \frac{2(2-\alpha)}{3(1-\alpha)}\left((2-\alpha)ie - \frac{3(1-\alpha)\alpha}{2(2-\alpha)}a_2 - b_2\right) \qquad (66)$$

$$A_5 = a_3 - \frac{2-\alpha}{3(1-\alpha)^2}\left(\frac{1-3\alpha+\alpha^2}{2}e - \frac{3(1-\alpha)\alpha}{2(2-\alpha)}a_3 - b_3\right)$$

$$A_6 = -\alpha a_3 + \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{3}e - \frac{2(2-\alpha)}{3(1-\alpha)}\left(\frac{1-3\alpha+\alpha^2}{2}e - \frac{3(1-\alpha)\alpha}{2(2-\alpha)}a_3 - b_3\right)$$

Nota: Por simplicidad se ha tomado m = 1, $m_{1/2} = \alpha$

Los seis parámetros a_i y b_i se determinan imponiendo $A_i = 0$ ($i = 1,..,6$)

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_2 = \frac{2ie}{3} = \frac{2ie}{3m^2} \\
a_3 &= \frac{1-\alpha}{3} e = \frac{m - m_{1/2}}{3m^2} e \\
b_1 &= b_2 = ie = \frac{ie}{m} \\
b_3 &= -\frac{\alpha e}{2} = -\frac{m_{1/2}}{2m} e
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Las relaciones (63) quedan

$$\gamma.V = \frac{2ie}{3m^2} \gamma.F.V + \frac{2ie}{3m^2} \gamma.F.\pi \phi + \frac{m-m_{1/2}}{3m^2} e\, \sigma.F\phi + \Omega_1 \tag{68a}$$

$$\pi.V - \gamma.\pi\gamma.V = \frac{ie}{m}\gamma.F.V + \frac{ie}{m}\gamma.F.\pi\phi - \frac{m_{1/2}}{2m} e\ \sigma.F\phi + \Omega_2 \tag{68b}$$

Luego

$$\pi.V - \left(\gamma.\pi + \frac{3m}{2}\right)\gamma.V = -\frac{e}{2}\sigma.F\phi + \Omega_3 - \frac{3}{2} m \Omega_1 \tag{69}$$

Ω_1 y Ω_2 verifican

$$\frac{2m - 3m_{1/2}}{2(m - m_{1/2})}\gamma.\pi\Omega_1 + \frac{2m - m_{1/2}}{3(m - m_{1/2})^2}\left(\gamma.\pi + 2(m - m_{1/2})\right)\Omega_2 = 0 \tag{70}$$

Al reemplazar Ψ_μ por V_μ y ϕ se ha aumentado el número de componentes a 20, sin embargo la existencia de una invariancia Gauge

$$V_\mu' \rightarrow V_\mu' = V_\mu + \left(\pi_\mu + \frac{m - m_{1/2}}{2}\gamma_\mu\right)\Lambda \tag{71a}$$

$$\phi \to \phi' = \phi - \Lambda \tag{71b}$$

$$\psi_\mu \to \psi'_\mu = V'_\mu + \left(\pi_\mu + \frac{m - m_{1/2}}{2}\gamma_\mu\right)\phi' = \psi_\mu \tag{71c}$$

reduce el número de componentes, de nuevo, a 16.

La ley de transformación para $\Omega_2 - \frac{3}{2} m \Omega_1$ inducida por (71) se obtiene a partir de (69)

$$\Omega'_2 - \frac{3}{2} m \Omega'_1 = \Omega_2 - \frac{3}{2} m \Omega_1 + \left(\frac{3(m_{1/2} - 2m)}{2} \gamma.\pi + 3m(m_{1/2} - m)\right) \Lambda \tag{72}$$

El campo Λ se puede escoger de manera que

$$\Omega_2 - \frac{3}{2} m \Omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \tag{73}$$

$$\left(\gamma.\pi + \frac{2(m - m_{1/2})(2m - m_{1/2})m}{4m^2 - 6m\, m_{1/2} + 3m^2_{1/2}} \right) \Omega_1 = 0 \tag{74}$$

Eligiendo $\Omega_1(t_0) = 0 \implies \Omega_1(t) = 0$ $\forall t$ lo cual se verifica si $\gamma.V = 0$ para un instante anterior a la interacción con la fuente externa.

Las ecuaciones para V_μ y ϕ obtenidas de (56) y (64) son finalmente:

$$\left(\gamma.\pi - m_{1/2} + \frac{m - m_{1/2}}{3m^2} e\,\sigma.F + \frac{2ie}{3m^2}\gamma.F.\pi\right)\phi + \frac{2ie}{3m^2}\gamma.F.V = 0 \tag{75a}$$

$$(\gamma.\pi - m)V_\mu - \left(\pi_\mu + \frac{m}{2}\gamma_\mu\right)\left(\frac{m - m_{1/2}}{3m^2} e\,\sigma.F\phi + \frac{2ie}{3m^2}\gamma.F.\pi\phi + \right.$$

$$\left. + \frac{2ie}{3m^2}\gamma.F.V\right) + ie\,F_\mu{}^\lambda \gamma_\lambda \phi = 0 \tag{75b}$$

las cuales conservan en su evolución la condición

$$\gamma.V = \frac{2ie}{3m^2}\gamma.F.V + \frac{2ie}{3m^2}\gamma.F.\pi\,\phi + \frac{m-m_{1/2}}{3m^2}e\,\sigma.F\,\phi \qquad (76)$$

según se demuestra utilizando la relación:

$$\gamma.\pi\,\sigma.F - 2i\,\pi.F.\gamma = \sigma.F\,\gamma.\pi - 2i\,\gamma.F.\pi \qquad (77)$$

Además (75) y (76) conducen a

$$\pi.V = \left(\gamma.\pi + \frac{3m}{2}\right)\left(\frac{2ie}{3m^2}\gamma.F.V + \frac{2ie}{3m^2}\gamma.F.\pi\phi + \frac{m-m_{1/2}}{3m^2}e\,\sigma.F\phi\right) - \frac{e}{2}\,\sigma.F\phi \qquad (78)$$

Las ecuaciones (76) y (78) reducen a 8 el número de grados de libertad de V_μ y son en RS* el equivalente de las relaciones (I.39,40).

(75a,b) forman un sistema de ecuaciones en el que no es posible desacoplar ϕ y V_μ, lo cual confirma el análisis realizado al principio basado en la variación de carga $\Delta Q_{1/2}$. En efecto, el término $\gamma.F.V$ en (75a) es esencialmente el mismo que aparece en (54) y (55).

Observar que el campo ϕ presenta un momento magnético anómalo y un término de acoplo derivativo causal cuyo determinante característico es:

$$D(n,F) = \left(n^2 - \left(\frac{2e}{3m^2}n.F\right)^2\right)^2$$

$$D(n,F)\Big|_{n_\mu = n(1,\vec{0})} = n^4\left(1 + \left(\frac{2\vec{E}}{3m^2}\right)^2\right)^2 \qquad (79)$$

III.3 CAMPO RS** LIBRE

La ecuación RS^{**}_{libre} con $\vec{\lambda} = (0,a,b)$ es

$$\left(i\gamma.\partial - m\right)\psi_\mu + a\,\gamma_\mu\,\gamma.\partial\;\gamma.\psi + mb\,\gamma_\mu\;\gamma.\psi = 0 \tag{80}$$

a partir de la cual se deduce una ecuación análoga a (6)

$$\left((2a-1)p^2 - 2m(2a-b)\,\gamma.p + m^2(1-4b)\right)\gamma.\psi = 0 \tag{81}$$

que puede escribirse (a ≠ 1/2)

$$(2a-1)\,(\gamma.p - m_1)\,(\gamma.p - m_2)\;\gamma.\psi = 0 \tag{82a}$$

$$m_1 + m_2 = \frac{2(2a-b)}{2a-1}\,m \tag{82b}$$

$$m_1 m_2 = \frac{1-4b}{2a-1}\,m^2 \tag{82c}$$

$$a = \frac{1}{2} - \frac{3m^2}{2(2m-m_1)(2m-m_2)} \tag{82d}$$

$$b = \frac{1}{4} + \frac{3m_1m_2}{4(2m-m_1)(2m-m_2)} \tag{82e}$$

(82) muestra que el espectro de masas de (80) está formado por $\left\{ m^2, m_1^2, m_2^2 \right\}$
En efecto:

$$\begin{aligned} Q(p) &= \left| (\gamma.p - m)\,g^\lambda_\mu + a\,\gamma_\mu\,\gamma.p\,\gamma^\lambda + mb\,\gamma_\mu\gamma^\lambda \right| = \\ &= (2a-1)^2\;(p^2-m^2)^4\;(p^2-m_1^2)^2\;(p^2-m_2^2)^2 \end{aligned} \tag{83}$$

El estudio de las soluciones libres ($m_1 \neq m_2$) conduce a una descomposición similar a (18)

$$\psi_\mu(x) = \psi_\mu^{3/2}(x) + \psi_\mu^1(x) + \psi_\mu^2(x) \tag{84a}$$

siendo

$$\psi_\mu^\ell(x) = \frac{1}{2m-m_\ell}\left(i\partial_\mu + \frac{m-m_\ell}{2}\gamma_\mu\right)\gamma.\psi^\ell(x) \tag{84b}$$

$$\gamma.\psi(x) = \gamma.\psi^1(x) + \gamma.\psi^2(x) \tag{84c}$$

$$(i\gamma.\partial - m_\ell)\,\gamma.\psi^\ell(x) = 0 \tag{84d}$$

Los campos ψ_μ^1 y ψ_μ^2 tienen spin 1/2 y norma ε_ℓ $(|\varepsilon_\ell| = 1)$ igual a:

$$\varepsilon_1 = \text{signo}\ \frac{m_2 - m_1}{2m - m_2} \tag{85a}$$

$$\varepsilon_2 = \text{signo}\ \frac{m_1 - m_2}{2m - m_1} \tag{85b}$$

obtenida de la corriente conservada

$$J^\mu = -(\bar\psi_\lambda \gamma^\mu \psi^\lambda + a\,\bar\psi.\gamma\,\gamma^\mu\,\gamma.\psi) \tag{86a}$$

$$\int J_1^0\, d^3x = \frac{3}{2(2m-m_1)^2}\,\frac{m_2-m_1}{2m-m_2}\int(\gamma.\psi^1)^\dagger(\gamma.\psi^1)\,d^3x \tag{86b}$$

$$\int J_2^0\, d^3x = \frac{3}{2(2m-m_2)^2}\,\frac{m_1-m_2}{2m-m_1}\int(\gamma.\psi^2)^\dagger(\gamma.\psi^2)\,d^3x \tag{86c}$$

Obsérvese que ϵ_1 y ϵ_2 no pueden ser simultáneamente positivas de acuerdo con lo expuesto en (I.46). La métrica es, al igual que en RS^*, indefinida. La descomposición de observables y las relaciones de ortogonalidad y completitud son una generalización de las obtenidas para el campo RS^* en la Sección III.1

§ IV. CUANTIFICACION CANONICA DE CAMPOS FERMIONICOS DE SPIN SUPERIOR EN INTERACCION

IV.1 METODO GENERAL

El procedimiento de cuantificación para campos de spin inferior (0,1/2,1) consiste en construir relaciones de (anti) conmutación (AR-CR) en concordancia con los Principios de la Mecánica Cuántica generalizados a sistemas con infinitos grados de libertad, extendiendo su validez vía transformación unitaria al caso en que exista interacción.

Para spin superior (s $\geq$ 3/2) este método no es válido, en tanto que las componentes del campo no son dinámicamente independientes, existiendo condiciones subsidiarias que dependen de campos externos.

Mostraremos que en interacción las relaciones de (anti) conmutación se modifican respecto al caso libre originándose diversas inconsistencias, en particular, la pérdida de positividad.

Una cuantificación compatible con el Principio de Acción de Schwinger de la teoría general expuesta en (I.2) se establece a partir de [21,40]

$$\delta\psi_\alpha(x) = -i\,[\,\psi_\alpha(x)\,,\,F(\sigma)\,]\quad,\quad x\in\sigma \tag{1}$$

$\{\psi_\alpha(x)\}_{\alpha=1,\dots,N}$ son componentes del campo $\psi(x)$ y $F(\sigma)$ el generador obtenido de los términos en derivadas de $\mathcal{L}$

$$F(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\mu \; \pi^{b\mu} \, \delta\psi_b$$

$$\pi^{b\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_b)} \qquad (2)$$

integrados sobre una superficie de tipo espacio σ.

Eligiendo σ isotemporal, el Principio de Acción (1) se escribe

$$\delta\psi_a(x) = -i \int d^3x' \; [\psi_a(x) \, , \pi^b(x') \, \delta\psi_b(x')] \qquad (3)$$

con $\pi^b \equiv \pi^{bo} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\psi}_b)}$

Introduciendo $\delta\psi_a(x)$ en la integral

$$\int d^3x' \left(i [\psi_a(x) , \pi^b(x') \, \delta\psi_b(x')] + \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \; \delta\psi_a(x') \right) = 0 \qquad (4)$$

El conmutador se puede desarrollar en términos de conmutadores o anticonmutadores

$$[A, BC] = \{A, B\} C - B \{A, C\} \qquad (5.a)$$

$$= [A, B] C + B [A, C] \qquad (5.b)$$

Para campos fermiónicos la conexión spin estadística dicta el uso de anticonmutadores

$$\int d^3x' \left[\left(i \{\psi_a(x), \pi^b(x')\} + \delta_a^b \; \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \right) \delta\psi_b(x') - \pi^b(x') \{\psi_a(x), \delta\psi_b(x')\} \right] = 0 \qquad (6)$$

Si las componentes $\psi_a(x)$ son independientes se obtienen las relaciones de anticonmutación a tiempos iguales (ETACR's)

$$\{\psi_a(x),\ \pi^b(x')\} = i\ \delta_a^b\ \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$
$$\}\psi_a(x),\ \delta\psi_b(x')\} = 0 \qquad (7)$$

aplicables a campos de spin 0, 1/2 y 1.

Si por el contrario el campo $\psi(x)$ se halla sometido a ligaduras representables por:

$$V_{(\ell)a}{}^b\ \psi_b(x) = 0 \qquad \ell = 1,2,\cdots \qquad (8)$$

donde $V_{(l)}$ puede depender de derivadas y campos externos pero no del propio ψ, se verifica

$$V_{(\ell)a}{}^b\ \delta\psi_b(x) = 0 \qquad \ell = 1,2,\cdots \qquad (9)$$

El problema variacional (6) con las condiciones adicionales (9) se resuelve por el método de multiplicadores de Lagrange [25].

Sea $\{\Lambda_{(l)a}{}^b(x,x')\}_{l=1,2,..}$ un conjunto de operadores elegidos de manera que las variaciones $\delta\psi_b(x')$ puedan considerarse independientes en:

$$\int d^3x' \Big[\Big(i\ \{\psi_a(x),\pi^b(x')\} + \delta_a^b\ \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \sum_\ell \Lambda_{(\ell)a}{}^c(x,x')\, V_{(\ell)c}{}^b(x')\Big)\delta\psi_b(x')$$
$$- \pi^b(x')\ \{\psi_a(x),\ \delta\psi_b(x')\}\Big] = 0 \qquad (10)$$

por tanto para tiempos iguales ($x_o = x'_o$)

$$\{\psi_a(x),\ \pi^b(x')\} = i\ \Big(\ \delta_a^b\ \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \sum_\ell \Lambda_{(\ell)a}{}^c(x,x')\, V_{(\ell)c}{}^b(x')\Big) \qquad (11.a)$$

$$\{\psi_a(x),\ \delta\psi^b(x')\} = 0 \qquad (11.b)$$

Calculemos el momento canónico $\pi^b(x)$ a partir de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\, \beta^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \rho \psi + \bar{\psi} B \psi \tag{12}$$

$$\pi^b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\psi}_b)} = \bar{\psi}_c\, (\beta^0)^{cb} = i\, \psi_c^\dagger\, (A^0)^{cb} \tag{13}$$

Estando excluidos en $\mathcal{L}$ acoplos derivativos que modifican π^b respecto al caso libre.

Finalmente (11.a) queda

$$\{ \psi_a(x), \psi_c^\dagger(x') \} (A^0)^{cb} = \delta_a^b\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \sum_l \Lambda_{(l)a}{}^c(x,x')\, V_{(l)c}{}^b(x') \tag{14}$$

$\Lambda_{(1)}$ se obtiene imponiendo (8) al sistema (14).

A continuación distinguimos dos casos: existencia de una sola ligadura (primaria) o de dos (primaria y secundaria).

En el primer caso (14) resulta:

$$\{ \psi_a(x), \psi_c^\dagger(x') \} (A^0)^{cb} = \delta_a^b\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \Lambda_a{}^c(x,x')\, V_c{}^b(x') \tag{15}$$

La ligadura primaria según (I.20)) con $Q_o = 1 - P_o$ es

$$V_1 \psi = P_o\, (A^l \partial_l + C(x))\, Q_o \psi + P_o\, C(x)\, P_o \psi = 0 \tag{16}$$

donde P_o $C(x)$ P_o ha de ser invertible a fin de determinar $P_o \psi$ en función de $Q_o \psi$

Actuando P_o por la derecha en (15):

$$(P_o)_a{}^b\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \Lambda_a{}^c(x,x')\, V_c{}^d\, (P_o)_d{}^b = 0 \tag{17}$$

en notación matricial

$$P_0 - \Lambda V P_0 = 0 \tag{18}$$

donde $\Lambda_a{}^c(x,x') = \Lambda_a{}^c\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$

Λ es el inverso de V en el subespacio P_0

$$\Lambda = P_0\,(P_0\,C(x)\,P_0)^{-1} \tag{19}$$

ETACR's de $\tilde{\psi}_a(x) = (Q_0\psi(x))_a$ deducidas de (15) y (19) son:

$$\{\tilde{\psi}_a(x), \tilde{\psi}_b^{\dagger}(x')\} = \left(Q_0(Q_0A^0Q_0)^{-1}Q_0\right)_{ab}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{20}$$

o más simplemente

$$\mathcal{C} = Q_0\,(Q_0\,A^0\,Q_0)^{-1}Q_0 \tag{21}$$

donde $\{\tilde{\psi}_a(x), \tilde{\psi}_b^{\dagger}(x')\} = \mathcal{C}_{ab}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$

(No confundir $\mathcal{C}$ con $C(x)$ en (16)). A^0 y consecuentemente $\mathcal{C}$ son matrices indefinidas para campos de spin > 1/2 según el teorema general de Johnson-Sudarshan [5].

En el segundo caso supondremos que las ligaduras secundarias determinan completamente las componentes $P_0\psi$ de forma que éstas no aparezcan en la ligadura primaria

$$V_1\psi = P_0\,(A^l\partial_l + C(x))\,Q_0\psi = P_0\,(A^l D_l + C'(x))\,Q_0\psi = 0 \tag{22}$$

siendo $D_l = \partial_l + ie\,A_l^{em}$ y $C'(x) = -i\eta\,(\rho + B_{no\,min}(x))$

Al actuar P_0 en (14)

$$P_0 - \Lambda_2 V_2 P_0 = 0 \tag{23}$$

Obteniéndose una fórmula análoga a (19)

$$\Lambda_2 = P_o (V_2 P_o)^{-1} \tag{24}$$

luego

$$Q_o \Lambda_2 = 0 \tag{25}$$

Restringiendo (14) al subespacio Q_o formado por las componentes $\tilde{\Psi} = Q_o \Psi$

$$\mathcal{C} (Q_o A^o Q_o) = Q_o (\mathbb{1} - \Lambda_1 V_1) Q_o \tag{26}$$

$$\mathcal{C} = Q_o (\mathbb{1} - \Lambda_1 V_1) Q_o (Q_o A^o Q_o)^{-1} Q_o \tag{27}$$

y en virtud de

$$\{ \psi(x) , \psi^{\dagger}(x') \} V_1^{\dagger} = \{ \psi(x) , (V_1 \psi)^{\dagger}(x') \} = 0 \Rightarrow \mathcal{C} V_1^{\dagger} = 0 \tag{28}$$

se deduce

$$Q_o (\mathbb{1} - \Lambda_1 V_1) Q_o (Q_o A^o Q_o)^{-1} Q_o V_1^{\dagger} = 0 \tag{29}$$

apareciendo una expresión para Λ_1

$$\Lambda_1 = - Q_o (Q_o A^o Q_o)^{-1} Q_o V_1^{\dagger} \Delta^{-1} \tag{30}$$

con

$$\Delta \equiv - V_1 (Q_o A^o Q_o)^{-1} V_1^{\dagger} \tag{31}$$

$\mathcal{C}$ está dado por

$$\mathcal{C} = Q_o (Q_o A^o Q_o)^{-1} Q_o + Q_o (Q_o A^o Q_o)^{-1} V_1^{\dagger} \Delta^{-1} V_1 (Q_o A^o Q_o)^{-1} Q_o \tag{32}$$

Es inmediato comprobar

$$V_1 C = C V_1^{\dagger} = 0 \tag{33}$$

Definamos el proyector Q_1 sobre el subespacio Q_o de funciones ψ que satis face la ligadura primaria

$$V_1 Q_1 = Q_1 V_1^{+} = 0 \tag{34}$$

$$Q_1 = Q_0 - V_1^{+} (V_1 V_1^{+})^{-1} V_1 \tag{35}$$

Existe una expresión análoga a (21) obtenida a partir de (32) y (35)

$$G\, Q_1 A^0 Q_1 = Q_1 \quad \Rightarrow \quad G = Q_1 (Q_1 A^0 Q_1)^{-1} Q_1 \tag{36}$$

Resultando

$$G > 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_1 A^0 Q_1 > 0 \tag{37}$$

La positividad de la métrica o producto escalar $Q_1 A^0 Q_1$ se establece através del estudio de G

Supongamos que el espectro de A^0 es según JS

$$\sigma(A^0) = \{ \lambda_+, \lambda_-, 0 \}$$

por lo que

$$A^0 = \lambda_+ P_+ + \lambda_- P_-$$

$$Q_o = P_+ + P_-$$

$$Q_0 (Q_0 A^0 Q_0)^{-1} Q_0 = \frac{1}{\lambda_+} P_+ + \frac{1}{\lambda_-} P_- = \frac{1}{\lambda_+} Q_0 + \left(\frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+} \right) P_- \tag{38}$$

el papel de la ligadura primaria consiste en eliminar las componentes de norma negativa $\Longrightarrow$ $\dim P_- = \dim P_o \Longrightarrow \exists R_o \,/\, Q_o R_o = R_o P_o = R_o$ y $P_- \propto R_o R_o^{+}$. R_o se escoje de manera que (38) sea $(\lambda_+ = 1)$

$$Q_0 (Q_0 A^0 Q_0)^{-1} Q_0 = Q_0 - R_0 R_0^{+} \tag{39}$$

Lema. Sea A^o tal que

$$Q_o\,(Q_o A^o Q_o)^{-1} Q_o = Q_o - R_o R_o^{+}$$

entonces

$$C > 0 \;\; \forall \text{ campo externo} \iff \Delta > 0 \;\; \forall \text{ campo externo}$$

Demostración. Utilizando (39) en (32)

$$\begin{aligned} C_1 = {} & Q_o - R_o R_o^{+} + V_1^{+} \Delta^{-1} V_1 - V_1^{+} \Delta^{-1} V_1 R_o R_o^{+} \\ & - R_o R_o^{+} V_1^{+} \Delta^{-1} V_1 + R_o R_o^{+} V_1^{+} \Delta^{-1} V_1 R_o R_o^{+} \end{aligned} \tag{40}$$

por (33)

$$C_1 = Q_1 C_1 Q_1 = Q_1\,(Q_o - R_o R_o^{+} + R_o R_o^{+} V_1^{+} \Delta^{-1} V_1 R_o R_o^{+})\,Q_1 \tag{41}$$

Si $\Delta \geq 0$ tenemos que $V_1 R_o$ es invertible en el subespacio P_o

$$V_1 R_o R_o^{+} V_1^{+} = \Delta + V_1 V_1^{+} > 0 \tag{42}$$

escribiéndose (41)

$$C_1 = Q_1 + Q_1 R_o R_o^{+} V_1^{+}\,(\Delta^{-1} - (R_o^{+} V_1^{+})^{-1} (V_1 R_o)^{-1})\,V_1 R_o R_o^{+} Q_1 =$$

$$= Q_1 + Q_1 R_o R_o^{+} V_1^{+} \left[\frac{1}{(V_1 R_o)(R_o^{+} V_1^{+}) - V_1 V_1^{+}} - \frac{1}{(V_1 R_o)(R_o^{+} V_1^{+})} \right] V_1 R_o R_o^{+} Q_1 \tag{43}$$

El término entre paréntesis adopta la forma [36]

$$\frac{1}{A-B} - \frac{1}{A} = \frac{1}{A}\,B\,\frac{1}{A-B} \tag{44}$$

donde

$$A = (V_1 R_o)(R_o^{+} V_1^{+}) > 0$$

$$B = V_1 V_1^{+} > 0$$

Evidentemente si $\Delta > 0 \Rightarrow C > 0$

Si Δ es indefinido existe un valor crítico del campo (s) externo (s) u_c / $0 \in \sigma(\Delta(u_c))$. En el entorno de u_c $\Delta(u) \gtreqless 0$ verificándose (42) $\Longrightarrow$ (44) es indefinido $\Longrightarrow C \gtreqless 0$ para campos suficientemente próximos a u_c Q.E.D.

Proposición. Δ es un operador local que verifica

i) $\Delta(u) = \Delta^+(u)$ es una matriz hermítica función de campos externos u

ii) $\Delta(u)$ es invariante Gauge

iii) Acoplo Mínimo $\Longrightarrow \Delta = \Delta(\vec{B})$ y $\exists B_c$ / $0 \in \sigma(\Delta(B_c))$

iv) Acoplo Mínimo + Acoplos No electromagnéticos (u') $\Longrightarrow$

$\Delta = \Delta(u', B)$ y $\exists B_c(u')$ / $0 \in \sigma(\Delta(u', B_c))$

Demostración.

$$\Delta = -V_1 (Q_0 A^0 Q_0)^{-1} V_1^+ = P_0 (A^i D_i + C^1(x)) Q_0 (Q_0 A^0 Q_0)^{-1} Q_0 (A^j D_j + C^1(x)) P_0 \qquad (45)$$

$\Longrightarrow \Delta = \Delta(D_1, u')$ donde u' representan los campos que aparecen en el término $C^1(x)$

Sean $S^{\mu\nu}$ los generadores de la representación $S(\Lambda)$

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\, \psi(\Lambda^{-1}(x-a))$$

$$S(\Lambda) = \exp(-\tfrac{i}{2}\, \epsilon_{\mu\nu}\, S^{\mu\nu})$$

se satisface

$$S(\Lambda)^{-1} \beta^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \beta^\nu \Rightarrow \beta^\mu S^{\lambda\nu} - S^{\lambda\nu}\beta^\mu = i(g^{\mu\lambda}\beta^\nu - g^{\mu\nu}\beta^\lambda) \qquad (46)$$

$$\eta\, S(\Lambda)^{-1} = S(\Lambda)^+ \eta \Rightarrow \eta\, S^{\mu\nu} = S^{\mu\nu +}\eta \qquad (47)$$

luego

$$A^\mu S^{\lambda\nu} - S^{\lambda\nu +} A^\mu = i(g^{\mu\lambda} A^\nu - g^{\mu\nu} A^\lambda) \qquad (48)$$

Para dimensión finita $S^{oi\dagger} = - S^{oi}$, de (48) se tiene

$$A^0 S^{oi} + S^{oi} A^0 = i A^i \tag{49}$$

$$A^j S^{oi} + S^{oi} A^j = i \delta_{ij} A^0 \tag{50}$$

de donde

$$P_o A^i = -i P_o S^{oi} A^0 = -i P_o S^{oi} Q_o A^0 Q_o \tag{51}$$

$$A^i P_o = -i A^0 S^{oi} P_o = -i Q_o A^0 Q_o S^{oi} P_o \tag{52}$$

Desarrollando (45)

$$\Delta = P_o C' Q_o (Q_o A^0 Q_o)^{-1} Q_o C' P_o + P_o C' Q_o (Q_o A^0 Q_o)^{-1} Q_o A^j D_j P_o +$$

$$+ P_o A^i D_i Q_o (Q_o A^0 Q_o)^{-1} Q_o C' P_o + P_o A^i D_i Q_o (Q_o A^0 Q_o)^{-1} Q_o A^j D_j P_o \tag{53}$$

El último término según (51), (52) y teniendo en cuenta $[D_i, D_j] = ieF_{ij}$ queda

$$- P_o S^{oi} D_i (Q_o A^0 Q_o)(Q_o A^0 Q_o)^{-1}(Q_o A^0 Q_o) S^{oj} D_j P_o =$$

$$= - P_o S^{oi} A^0 S^{oj} P_o D_i D_j = - \frac{i}{2} P_o A^i S^{oj} P_o (D_i D_j - D_j D_i) =$$

$$= \frac{e}{2} P_o A^i S^{oj} P_o F_{ij} = - \frac{ie}{2} P_o S^{oi} A^0 S^{oj} P_o F_{ij} \tag{54}$$

Eligiendo el conjunto de matrices $\{A^\mu\}$ irreducibles, se obtiene que (54) no puede anularse. Supongamos que (54) fuese nula, entonces

$$P_o S^{oi} Q_o = 0$$

y de (51) $\Longrightarrow$ $P_o A^i Q_o = 0$ en contradicción con la hipótesis de irreducibilidad. Si $\{A^\mu\}$ es reducible $\Longrightarrow$ (54) se descompone en suma de términos correspondientes a las partes irreducibles de A^μ a las que se aplica el razonamiento anterior.

Definiendo

$$X^{ij} = P_o \left(S^{oi} A^o S^{oj} - S^{oj} A^o S^{oi} \right) P_o$$

se calcula por medio de

$$[S^{kl}, S^{oi}] = i \left(\delta_{ki} S^{ol} - \delta_{il} S^{ok} \right) \tag{55}$$

$$[S^{kl}, A^o] = 0 \tag{56}$$

el conmutador

$$[S^{kl}, X^{ij}] = i \left(\delta_{ik} X^{lj} + \delta_{lj} X^{ki} - \delta_{li} X^{kj} - \delta_{kj} X^{li} \right) \tag{57}$$

que comparado con

$$[S^{kl}, S^{ij}] = i \left(\delta_{ik} S^{lj} + \delta_{lj} S^{ki} - \delta_{li} S^{kj} - \delta_{kj} S^{li} \right) \tag{58}$$

induce al relación

$$X^{ij} = ix \, P_o S^{ij} P_o \tag{59}$$

con $x \in \mathbb{R}$ y por tanto (54) es simplemente:

$$\frac{ex}{4} \, P_o S^{ij} P_o F_{ij} \tag{60}$$

Los términos de Δ lineales en D_1 se desarrollan de forma análoga a (54) obteniéndose finalmente

$$\Delta = P_o C' Q_o \left(Q_o A^o Q_o \right)^{-1} Q_o C' P_o - \frac{ie}{2} P_o S^{oi} A^o S^{oj} P_o F_{ij} \tag{61}$$

$$- \frac{i}{2} P_o S^{oi} (\partial_i C') P_o + \frac{i}{2} P_o (\partial_i C') S^{oi} P_o$$

En acoplo mínimo $C'_o = -i\eta\rho$ es una matriz constante $\Longrightarrow \Delta = \Delta(\vec{B})$ e indefinida existiendo por tanto, al menos, un valor crítico B_c tal que $\Delta(B_c)$ es singular.

Si existen acoplos no electromagnéticos $\Longrightarrow C' = C'(x)$, modificándose el primer término en $\Delta = \Delta(B,u')$; la dependencia en u' es lineal y cuadrática. Análogamente para valores fijos de u' se puede hallar un campo crítico $B_c(u')$ que convierte a $\Delta(\vec{B},u')$ en una matriz singular. Q.E.D.

Si A^o es de la forma

$$A^o = \lambda_+ P_+ + \lambda_- P_-$$

con $\dim P_o = \dim P_- \neq \dim P_+$, resulta fácil ver que $\Delta(0) \geq 0$.

$$\Delta(0) = P_o C'_o \left(\frac{1}{\lambda_+} P_+ + \frac{1}{\lambda_-} P_- \right) C'_o P_o = -\frac{1}{\lambda_-} (P_o C'_o P_-)(P_o C'_o P_-)^+ > 0$$

pues por el Lema de Schur $[C'_o, S^{ij}] = 0 \Longrightarrow P_o C'_o P_+ = 0$. En este caso se obtiene ETACR's definidas positivas en ausencia de interacción.

Para acoplos no electromagnéticos

$$\Delta(u') = P_o C'(u') Q_o (Q_o A^o Q_o)^{-1} Q_o C'(u') P_o - \frac{i}{2} P_o S^{oi} (\partial_i C'(u')) P_o$$

no pudiéndose afirmar nada genérico acerca de la positividad de $\Delta(u')$, aunque los casos conocidos muestran que $\Delta(u')$ es indifinido para valores de u' suficientemente elevados.

IV.2 INTERACCION DE CAMPOS (S) FERMIONICOS Ψ CON CAMPO ESCALAR ϕ CUANTIZADO

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_0 \tag{62.a}$$

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}\beta^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi}\rho\psi + \bar{\psi}B\psi \tag{62.b}$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \mu_0^2\,\phi^2\right) \tag{62.c}$$

donde $B = B\left(A_\mu^{em}, \phi, \partial_\mu\phi\right)$ y las ecuaciones de campo son:

$$\beta^\mu \partial_\mu \psi + \rho\psi + B\psi = 0 \tag{63}$$

$$\left(\Box + \mu_0^2\right)\phi + \partial_\mu\left(\bar{\psi}\frac{\partial B}{\partial(\partial_\mu\phi)}\psi\right) - \bar{\psi}\frac{\partial B}{\partial\phi}\psi = 0 \tag{64}$$

Actuando P_0 sobre (63)

$$\left(P_0 A^\ell \partial_\ell Q_0 + P_0 C\right)\psi = 0 \tag{65}$$

con $\quad C = -i\eta(\rho + B)$

(65) es una ligadura si no envuelve derivadas temporales de los campos $\Longrightarrow$ $\dot{\phi}$ no aparece en B. Para mayor simplicidad suponemos B independiente de ϕ

Escribiremos (65)

$$V_1\psi = \left(V_1^0 + \vec{\tau}\cdot\vec{\nabla}\phi\right)\psi = 0 \tag{66}$$

Verificando $P_0 V_1 P_0 = 0 \Longrightarrow \exists$ ligaduras secundarias que determinan $P_0\psi$ en función de $Q_0\psi$

Reescribamos $\mathcal{L}_0$ [28]

$$\mathcal{L}_0 = \phi_\mu \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi_\mu + \frac{1}{2} \phi^\mu \phi_\mu$$

$$\phi_\mu \equiv \partial_\mu \phi \tag{67}$$

(67) conduce a las mismas ecuaciones que (62.c) tomando ϕ y ϕ_μ como variables independientes. El generador F es

$$F = \int d^3x' \left(i \psi^\dagger A^0 \psi + \phi_0 \delta\phi - \phi \, \delta\phi_0 \right) \tag{68}$$

por el Principio de Acción:

$$\delta \chi(x) = -i \left[\chi(x), F \right] \tag{69}$$

siendo $\chi = \psi, \phi, \phi_0$

En F solo intervienen $\tilde{\psi} = Q_0 \psi \Longrightarrow$ Eliminación de la ligadura 2ª $\Longrightarrow P_0\psi = f(Q_0\psi)$.

La ecuación (8) con la ligadura

$$\delta(v_1 \psi) = v_1 \delta\psi + \vec{z}.\vec{\nabla}(\delta\phi)\psi = 0 \tag{70}$$

se resuelve por el método de los multiplicadores de Lagrange

$$\delta\chi(x) = \int d^3x' \Big(-i \left[\chi(x), i \tilde{\psi}(x') A^0 \delta\tilde{\psi}(x') + \phi_0(x') \delta\phi(x') - \phi(x') \delta\phi_0(x') \right]$$

$$+ \Lambda_\chi(x,x') \; \delta\left(v_1(x') \tilde{\psi}(x') \right) \Big) \tag{71}$$

Por (70) e integrando por partes $\Lambda_\chi(x,x') \vec{z}.\vec{\nabla}'(\delta\phi(x'))\tilde{\psi}(x')$

$$\int d^3x' \Big(- [\chi(x), \tilde{\Psi}(x')\Lambda^0 \delta\tilde{\Psi}(x')] + i\,[\chi(x), \phi_0(x')\,\delta\phi(x') - \phi(x')\,\delta\phi_0(x')]$$

$$+ \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta\chi(x') - \Lambda_\chi(x,x')\, V_1\, \delta\tilde{\Psi}(x') + \vec{\nabla}'\Lambda_\chi(x,x')\,\vec{\tau}\,\delta\phi(x')\,\tilde{\Psi}(x')\Big) = 0 \tag{72}$$

Si $\chi(x) = \tilde{\Psi}(x)$ se tiene a tiempos iguales ($x_0 = x'_0$)

$$\{\tilde{\Psi}(x), \tilde{\Psi}(x')^{+}\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \Lambda_\Psi(x,x')\, V_1 \tag{73.a}$$

$$[\tilde{\Psi}(x), \phi(x')] = 0 \tag{73.b}$$

$$[\tilde{\Psi}(x), \phi_0(x')] = i\,\vec{\nabla}'\Lambda_\Psi(x,x')\,\vec{\tau}\,\tilde{\Psi}(x') \tag{73.c}$$

Imponiendo la ligadura (66) en (73.a)

$$\Lambda_\Psi(x,x') = \bar{A}_0^{1} V_1^{+} \frac{1}{V_1 A_0^{-1} V_1^{+}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') = -\,\bar{A}_0^{1} V_1^{+}\,\frac{1}{\Delta}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

con $\quad \Delta = -V_1\,\bar{A}_0^{1}\,V_1^{+}$

$$\{\tilde{\Psi}(x), \tilde{\Psi}(x')^{+}\} = \left(\bar{A}_0^{1} + \bar{A}_0^{1} V_1^{+}\,\frac{1}{\Delta}\,V_1\,\bar{A}_0^{1}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{74.a}$$

$$[\tilde{\Psi}(x), \phi(x')] = 0 \tag{74.b}$$

$$[\tilde{\Psi}(x), \phi_0(x')] = -i\,\vec{\nabla}'\,\bar{A}_0^{1}\,V_1^{+}\,\frac{1}{\Delta}\,\vec{\tau}\,\tilde{\Psi}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{74.c}$$

Si $\chi(x) = \phi_0(x)$, se deduce

$$[\phi_o(x), \tilde{\varphi}^{+}(x')]\, A^o = -\Lambda_{\phi_o}(x,x')\, v_1 \tag{75.a}$$

$$[\phi_o(x), \phi_o(x')] = i\, \vec{\nabla}'\Lambda_{\phi_o}(x,x')\, \vec{\tau}\, \tilde{\varphi}(x') \tag{75.b}$$

$$[\phi_o(x), \phi(x')] = -i\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{75.c}$$

Imponiendo la ligadura a (75.a) y con ayuda de (75.c)

$$\Lambda^{+}_{\phi_o}(x,x') = -i\, \frac{1}{\Delta}\, \vec{\tau}.\vec{\nabla}'\, \tilde{\varphi}\quad \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{76}$$

de donde

$$[\tilde{\varphi}(x'), \phi_o(x)] = i\, \vec{\nabla}'\, A_o^{-1}\, v_1^{+}\, \frac{1}{\Delta}\, \vec{\tau}\, \tilde{\varphi}\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

Nótese la igualdad con (74.c) ($\vec{x} \longleftrightarrow \vec{x}'$).

(75.b) con (76) se convierte en:

$$[\phi_o(x), \phi_o(x')] = \vec{\nabla}\, \tilde{\varphi}^{+}\, \vec{\tau}^{+}\, \frac{1}{\Delta}\, \vec{\tau}.\vec{\nabla}\, \tilde{\varphi}\quad \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \tag{77}$$

Por último consideramos $\chi(x) = \phi(x)$

$$[\phi(x), \tilde{\varphi}^{+}(x')] = -\Lambda_{\phi}(x,x')\, v_1 \tag{78.a}$$

$$[\phi(x), \phi_o(x')] = i\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') + i\, \vec{\nabla}'\Lambda_{\phi}(x,x')\, \vec{\tau}\, \tilde{\varphi}(x') \tag{78.b}$$

$$[\phi(x), \phi(x')] = 0 \tag{78.c}$$

Es claro $\quad \Lambda_{\phi}(x,x') = 0$

La positividad de (74.a) depende por el Lema IV.1 de Δ. En ausencia de campo electromagnético Hagen[25]estudia el acoplo

$$\mathcal{L}_I = g\, \bar{\Psi}^\mu \Theta_{\mu\nu} \chi\, \partial^\nu \phi + g (\partial^\nu \phi) \bar{\chi}\, \Theta_{\nu\mu} \Psi^\mu \tag{79}$$

$$\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h \gamma_\mu \gamma_\nu$$

donde Ψ_μ es un campo RS, χ campo spinorial y ϕ campo escalar, obteniendo

$$\Delta \propto m^2 - \frac{2}{3} g^2 (\vec{\nabla}\phi)^2 \tag{80}$$

Si se considera el campo electromagnético externo [28]

$$\Delta \propto m^2 - \frac{2e}{3} \vec{\Sigma}.\vec{B} - \frac{2}{3} g^2 (\vec{\nabla}\phi)^2 \tag{81}$$

como era de esperar en virtud de la expresión genérica (61). Las interferencias y cancelaciones en Δ solo pueden producirse en el término dependiente de campos distintos del electromagnético.

IV.3 RELACIONES DE (ANTI) CONMUTACION E HIPERBOLICIDAD DE SISTEMAS SINGULARES

Existe una íntima relación entre las relaciones de conmutación de un campo y el carácter hiperbólico de las ecuaciones que lo describen. Escribamos la ecuación

$$(\beta^\mu \partial_\mu + \rho + B)\, \psi = 0 \tag{82}$$

en forma hermítica

$$(A^\mu \partial_\mu + C)\, \psi = 0 \tag{83}$$

El campo ψ se supondrá sometido a ligaduras primarias y secundarias. Sea Q_1 el proyector dado por (35) y ψ una función perteneciente a este subespacio

$$Q_1 \psi = \psi \tag{84}$$

Restringiendo (83) al subespacio Q_1 se tiene:

$$Q_1 \left(A^\mu \partial_\mu + C \right) Q_1 \psi = 0 \tag{85}$$

o bien

$$Q_1 \left(A^\mu Q_1 \partial_\mu + (\partial_\mu Q_1) + C \right) Q_1 \psi = 0 \tag{86}$$

ecuación que permite calcular $\partial_t (Q_1 \psi)$ ó $\partial_t \psi$ siempre que $Q_1 A^0 Q_1$ sea un operador invertible en el subespacio Q_1. Pero $C = Q_1 (Q_1 A^0 Q_1)^{-1} Q_1 \Longrightarrow C$ está bien definido $\Longrightarrow \Delta$ es invertible. Siendo el recíproco también cierto:

$Q_1 A^0 Q_1$ es invertible $\Longleftrightarrow \Delta$ es invertible

y por tanto

$Q_1 A^0 Q_1$ es singular $\Longleftrightarrow \Delta$ es singular

Pero $Q_1 A^0 Q_1$ es singular $\Longleftrightarrow$ t = cte es una superficie característica. Si llamamos $D(n,u)$ al determinante característico

$$D(n,u) = \det_{Q_1} \left(Q_1 A^\mu n_\mu Q_1 \right) = \det_{Q_1} \left(A^\mu n_\mu \right) \tag{87}$$

es claro que

$$\left. D(n,u) \right|_{n_\mu = n(1,\vec{0})} \propto \det_{P_0} \left(\Delta(u) \right)$$

$$\left. \frac{D(n,u)}{D(n,0)} \right|_{n_\mu = n(1,\vec{0})} = \frac{\det_{P_0} \left(\Delta(u) \right)}{\det_{P_0} \left(\Delta(0) \right)} \tag{88}$$

Expresión que permite obtener D(n,u) a partir exclusivamente de Δ(u).
$\forall n_j$ D(n,u) se calcula a partir de $D(n,u)\Big|_{n_\mu = n(1,0)}$ por medio de una transformación de Lorentz.

IV.4 CUANTIFICACIÓN DEL CAMPO RS

La elección $\lambda_1 = 1$ conduce a los resultados siguientes:

$$(A^0)_{\lambda\mu} = -\left(g_{\lambda\mu} - g_{0\mu}\gamma_\lambda^+\gamma_0 - g_{0\lambda}\gamma_0\gamma_\mu + \gamma_\lambda^+\gamma_\mu \right) \tag{89.a}$$

$$(A^0)_{00} = (A^0)_{0i} = (A^0)_{i0} = 0$$

$$(A^0)_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_i\gamma_j = \delta_{ij} - \alpha_i\alpha_j \tag{89.b}$$

$$(P^0)_{\mu\lambda} = g_{0\mu}\; g_{0\lambda}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{\Psi} = 0 \qquad \text{(ligadura primaria)} \tag{89.c}$$

Restringiéndonos al subespacio Q_0 formado por $\psi_\mu = (0, \psi_i)$ se deduce del Principio de Schwinger ($x_0 = x'_0$)

$$\left\{ \psi^i(x), \psi^{j+}(x') \right\} = \left(\delta_{ik}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \Lambda_1^i(x,x')\, V_1^k \right)\left(\bar{A}_0^{1}\right)^{kj} \tag{90}$$

Expresado en forma vectorial

$$\left\{ \vec{\Psi}(x), \vec{\Psi}^+(x') \right\} = \left(\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \vec{\Lambda}_1(x,x')\,\vec{V}_1 \right) \bar{A}_0^{1} \tag{91}$$

donde $A^0 = 1 - \vec{\alpha}\,\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \bar{A}_0^1 = 1 - \frac{1}{2}\vec{\alpha}\,\vec{\alpha}$

Imponiendo la ligadura a $\psi^+(x')$

$$\vec{\Psi}^+ \cdot \vec{V}_1^+ = 0 \tag{92}$$

se obtiene

$$\left(\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \vec{\Lambda}_1(x,x')\,\vec{v}_1 \right) \bar{A}_o^{-1}\,\vec{v}_1^{\,\dagger} = 0 \tag{93}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} \vec{\Lambda}_1(x,x') &= \bar{A}_o^{-1}\, v_1^{\dagger} \left(\vec{v}_1\, \bar{A}_o^{-1}\, \vec{v}_1^{\,\dagger} \right)^{-1} \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \\ &= -\, \bar{A}_o^{-1}\, \vec{v}_1^{\,\dagger}\, \Delta^{-1}\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \end{aligned} \tag{94}$$

donde $\Delta = -\, \vec{v}_1\, \bar{A}_o^{-1}\, \vec{v}_1^{\,\dagger}$

ETACR's son:

$$\left\{ \vec{\psi}(x), \vec{\psi}^{\dagger}(x') \right\} = \left(\bar{A}_o^{-1} + \bar{A}_o^{-1}\,\vec{v}_1^{\,\dagger}\,\frac{1}{\Delta}\,\vec{v}_1\,\bar{A}_o^{-1} \right) \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') = \tag{95}$$

$$= C\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

Nótese:

$$C = C^{\dagger} \tag{96.a}$$

$$C\,\vec{v}_1^{\,\dagger} = \vec{v}_1\, C \tag{96.b}$$

Sea Q_1 el proyector del subespacio de funciones $\vec{\psi}$ que verifican la ligadura primaria

$$Q_1 = 1 - \vec{v}_1^{\,\dagger} \left(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1^{\,\dagger} \right)^{-1} \vec{v}_1 \tag{97}$$

Es claro que

$$Q_1\, C = C\, Q_1 = C \tag{98}$$

$$C = 1 - \frac{1}{2}\,\vec{\alpha}\,\vec{\alpha} + \left(1 - \frac{1}{2}\,\vec{\alpha}\,\vec{\alpha}\right) \vec{v}_1^{\,\dagger}\,\frac{1}{\Delta}\,\vec{v}_1 \left(1 - \frac{1}{2}\,\vec{\alpha}\,\vec{\alpha}\right) \tag{99}$$

En virtud de (98)

$$C = Q_1 C Q_1 = Q_1 \left(1 - \frac{1}{2} \vec{\alpha}\vec{\alpha} + \frac{1}{4} \vec{\alpha} (\vec{\alpha}.\vec{V}_1^{+}) \frac{1}{\Delta} (\vec{V}_1.\vec{\alpha})\vec{\alpha} \right) Q_1 =$$

$$= Q_1 \left(1 + \frac{1}{4} \vec{\alpha} (\vec{\alpha}.\vec{V}_1^{+}) \left[\frac{1}{\frac{1}{2}(\vec{V}_1.\vec{\alpha})(\vec{\alpha}.\vec{V}_1^{+}) - \vec{V}_1.\vec{V}_1^{+}} - \frac{1}{\frac{1}{2}(\vec{V}_1.\vec{\alpha})(\vec{\alpha}.\vec{V}_1^{+})} \right] (\vec{V}_1.\vec{\alpha})\vec{\alpha} \right) Q_1 \tag{100}$$

donde $\Delta = \frac{1}{2}(\vec{V}_1.\vec{\alpha})(\vec{\alpha}.\vec{V}_1^{+}) - \vec{V}_1.\vec{V}_1^{+}$

Utilizando el Lema de IV.1 $\Delta > 0 \iff C > 0$. Se estudian a continuación algunos ejemplos de acoplos del campo RS con campos exteriores.

1) Acoplo mínimo con campos electromagnéticos.

La ligadura primaria es

$$\vec{V}_1 . \vec{\Psi} = (\vec{\pi} - h\vec{\alpha}).\vec{\Psi} = 0 \tag{101}$$

Un sencillo cálculo conduce a:

$$\Delta = \frac{1}{2} (2 \vec{\alpha}.\vec{\pi} + 3\beta m)(2\vec{\alpha}.\vec{\pi} + 3\beta m) - (\vec{\pi} - h\vec{\alpha})(\vec{\pi} - \vec{\alpha} h) =$$

$$= \frac{3m^2}{2} - e \vec{\Sigma}.\vec{B} \tag{102}$$

$$(\vec{\alpha}.\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - e \vec{\Sigma}.\vec{B}$$

Este resultado, obtenido por primera vez por Johnson-Sudarshan, es una aplicación al caso de spin 3/2 de la proposición demostrada en (IV.1).

Sustituyendo en (99) [6]

$$\{ \psi_i(x), \psi_j^{+}(x') \} = \left(\delta_{ij} - \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j + \frac{1}{6m^2} (2\pi_i + \alpha_i \beta m) \left(1 - \frac{2e}{3m^2} \vec{\Sigma}.\vec{B}\right)^{-1} (2\pi_j + m\beta\alpha_j) \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \tag{103}$$

Para valores del campo magnético superiores al crítico las relaciones de anticonmutación dejan de ser locales, perdiendo (103) su validez. En estos casos habrá que obtener las funciones de Green a partir de las ecuaciones de campo con datos de Cauchy sobre superficies características que no son de tipo espacio.

2) Acoplos tipo Pauli con campo electromagnético

La ligadura primaria es

$$\left(\vec{\pi} - h\vec{\alpha}\right).\vec{\psi} - \gamma^0 T_0{}^{\lambda}\, \psi_\lambda = 0 \tag{104}$$

Si $T_{00} = 0$ se deduce la existencia de ligaduras secundarias que determinan ψ_0 en términos de $\vec{\psi}$. (104) se escribe

$$\vec{V}_1 . \vec{\psi} = \left(\vec{\pi} - h\vec{\alpha} + \vec{t}\right).\vec{\psi} \tag{105}$$

donde $t^i = \gamma^0 T^{0i}$.

Δ es ahora

$$\Delta = \Delta_{min} + \frac{1}{2}(\vec{t}.\vec{\alpha})(\vec{\alpha}.\vec{t}^{+}) - \vec{t}.\vec{t}^{+}$$
$$- \frac{m}{2}\beta\, \vec{\alpha}.\vec{t}^{+} - \frac{m}{2}\vec{t}.\vec{\alpha}\beta - \left(\vec{\pi}.\vec{t}^{+} + \vec{t}.\vec{\pi}\right) \tag{106}$$

El tensor antisimétrico $T_{\mu\nu}$ está dado por

$$T_{\mu\nu} = i q_2 F_{\mu\nu} + q_3 \gamma^5 \tilde{F}_{\mu\nu} + i q_1 \left(F_{\mu\lambda}\sigma^{\lambda}{}_{\nu} - \sigma_{\mu\lambda} F^{\lambda}{}_{\nu}\right) \tag{107}$$

con q_1, q_2 y $q_3 \in \mathbb{R}$, de donde

$$\vec{t} = -i q_2 \gamma^0 \vec{E} - q_3 \gamma^0 \gamma^5 \vec{B} - i q_1 \gamma^0 \vec{E} \times \vec{\Sigma} + q_1 \vec{B} \times \vec{\gamma} \tag{108}$$

verificando

$$\vec{t}^{+} = -\vec{t} \tag{109}$$

cuya sustitución en (106) conduce a

$$\Delta = \Delta_{min} + \vec{t}.\vec{t} - \frac{1}{2}(\vec{t}.\vec{\alpha})(\vec{\alpha}.\vec{t}) + \frac{m}{2}\beta\,\vec{t}.\vec{\alpha} - \frac{m}{2}\vec{t}.\vec{\alpha}\,\beta - (\vec{t}.\vec{\pi} - \vec{\pi}.\vec{t}) \tag{110}$$

El último término depende de las derivadas de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ y de sus fuentes $(\rho, \vec{J}) \Longrightarrow \Delta$ es local. Calculémoslo

$$\vec{t}.\vec{\pi} - \vec{\pi}.\vec{t} = i\,\vec{\nabla}.\vec{t} = q_2\,\rho\,\gamma^0 - q_1\gamma^0\,\vec{\Sigma}.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + i q_1\,\vec{\gamma}.\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{J}\right) \tag{111}$$

donde se han utilizado las ecuaciones de Maxwell.

Si $q_2 = q_1 = 0$ entonces (111) se anula ($\vec{\nabla}.B = 0$), ello nos indica que el término de Pauli $q_3\,\bar{\Psi}_\mu\gamma^5\tilde{F}^{\mu\lambda}\Psi_\lambda$ es el más idóneo que puede ser añadido al Lagrangiano mínimo.

En este caso se tiene

$$\Delta = \frac{3m^2}{2} + (mq_3 - e)\,\vec{\Sigma}.\vec{B} - \frac{q_3^2}{2}\,\vec{B}^2 \tag{112}$$

Eligiendo $q_3 = \frac{e}{m}$ se cancela el término de acoplo mínimo en Δ, el cual sigue siendo indefinido con un campo crítico $B_c = \frac{3\,m^2}{e}$. Los valores críticos del campo magnético $\forall\, q_3$ se obtienen de la ecuación

$$\det\Delta = \left(\frac{3m^2}{2}\right)^4\left(\left(1 - \frac{q_3^2}{3m^2}\vec{B}^2\right)^2 - \left(\frac{2(mq_3-e)}{3m^2}\,\vec{B}\right)^2\right)^2 = 0 \tag{113}$$

que coincide "prácticamente" con la obtenida por Shamaly-Capri[26] en el estudio de la hiperbolicidad de un sistema de ecuaciones 20 x 20

$$D(n) = n^{20}\left[\left(1 - \frac{q_3^2}{3m^2}\vec{B}^2\right)^2 - \left(\frac{2(mq_3-e)}{3m^2}\vec{B}\right)^2\right]\left[\left(1 - \frac{q_3^2}{3m^2}\vec{B}^2\right)^2 - \left(\frac{2(mq_3+e)}{3m^2}\vec{B}\right)^2\right] \tag{114}$$

con $n_\mu = n(1,\vec{0})$

Obsérvese que el segundo factor en (114) no aparece en (113). En los casos con q_1 y $q_2 \neq 0$ estudiados por Shamaly-Capri, las velocidades y superficies características dependen de $\pi^\kappa T_\kappa{}^0$ y por tanto del potencial vector, lo cual está en contradicción con el carácter local de Δ, es decir, $\Delta(F_{\mu\nu})$. Esto muestra que el método empleado por ellos o tal vez el cálculo es erróneo.

Nota: En su trabajo la ligadura primaria $(\vec{\pi} - h\vec{\sigma}).\vec{\psi} - T_0{}^\lambda \psi_\lambda = 0$, es incorrecta. Haciendo el cambio $\vec{t} \longrightarrow \gamma_0\vec{t}$ entonces Δ depende del potencial vector y det Δ conduce a (114).

En los casos con q_1 y $q_2 \neq 0$ Δ está dominado por la parte cuadrática

$$\vec{t}.\vec{t} - \frac{1}{2}(\vec{t}.\vec{\alpha})(\vec{\alpha}.\vec{t}) =$$

$$= -\frac{q_3^2}{2}\vec{B}^2 - \frac{q_2^2}{2}\vec{E}^2 + (q_2q_3 - 2q_1^2)(\vec{E}\times\vec{B}).\vec{\alpha} + 2(q_1q_3+q_1q_2)\vec{E}.\vec{B}\,\gamma^5 \tag{115}$$

que obviamente es indefinida $\Longrightarrow$ Δ indefinida. Los valores críticos de los campos (Δ singular) se obtienen de nuevo de la ecuación

$$\det\Delta = \left| \frac{3m^2}{2} - \frac{q_3^2}{2}\vec{B}^2 - \frac{q_2^2}{2}\vec{E}^2 + (q_2q_3 - 2q_1^2)(\vec{E}\times\vec{B}).\vec{\alpha} + \right.$$

$$\left. + 2(q_1q_3+q_1q_2)\vec{E}.\vec{B}\,\gamma^5 + (mq_3 - e)\,\vec{\Sigma}.\vec{B} + 2q_1\,\vec{\alpha}.\vec{E} \right| = 0 \tag{116}$$

que por las consideraciones anteriores siempre tiene solución $\forall q_1$.

Cuando $\vec{t}$ sea de la forma

$$\vec{t} = \vec{u}\,X \tag{117}$$

donde X es una matriz antihermítica y $\vec{u}$ componentes espaciales de un campo externo, se obtiene Δ indefinida. En efecto:

$$\vec{t}.\vec{t} - \frac{1}{2}(\vec{t}.\vec{\alpha})(\vec{\alpha}.\vec{t}) = \frac{1}{2}\vec{u}^2 X^2 = -\frac{1}{2}\vec{u}^2 X X^+ < 0 \qquad (118)$$

En el caso más general bastaría probar que la traza

$$T_r\left(\vec{t}.\vec{t} - \frac{1}{2}(\vec{t}.\vec{\alpha})(\vec{\alpha}.\vec{t})\right) = \frac{1}{2}T_r(\vec{t}.\vec{t}) + \frac{i}{2}T_r(\vec{\Sigma}.(\vec{t}\times\vec{t})) \qquad (119)$$

es indefinida para lo cual es suficiente

$$T_r\left(\vec{\Sigma}.(\vec{t}\times\vec{t})\right) = 0 \qquad (120)$$

3) Acoplo no invariante Gauge.

La ecuación

$$(\gamma.\pi_1 - m)\psi_\mu - \pi_{2\mu}\gamma.\psi - \gamma_\mu \pi_2.\psi + \gamma_\mu \gamma.\pi_3 \gamma.\psi + m\gamma_\mu \gamma.\psi = 0 \qquad (121)$$

con $\pi_K^\mu = i\partial^\mu - e_K A^\mu$, k = 1,2,3, es derivable de una densidad Lagrangiana y se reduce en el caso libre a la ecuación RS libre.

De μ = 0 en (121) y multiplicando por γ^0 se deduce:

$$(2e_2 - e_1 - e_3)A^0\psi^0 + (e_1 - e_3)\vec{\alpha}.\vec{A}\psi^0 + (e_3 - e_2)A^0\vec{\alpha}.\vec{\psi} +$$
$$+ \left(\vec{\pi}_2 - (\vec{\alpha}.\vec{\pi}_3 + m\beta)\vec{\alpha}\right)\vec{\psi} = 0 \qquad (122)$$

En el Gauge de Coulomb (122) es una ligadura primaria para las componentes $\vec{\psi}$ si $e_1 = e_3$

$$\vec{V}_1.\vec{\psi} = \left(\vec{\pi}_2 - (\vec{\alpha}.\vec{\pi}_1 + m\beta)\vec{\alpha}\right).\vec{\psi} = 0 \qquad (123)$$

Calculemos Δ

$$\Delta = \frac{3m^2}{2} + \frac{3}{2}\vec{\pi}_1^{\,2} - \frac{1}{2}\vec{\pi}_2^{\,2} - \frac{1}{2}(\vec{\pi}_1\cdot\vec{\pi}_2 + \vec{\pi}_2\cdot\vec{\pi}_1) - e_1\,\vec{\Sigma}\cdot\vec{B} \qquad (124)$$

Si $e_1 \neq e_2$ Δ es un operador no local pues depende de derivadas. Si $e_1 = e_2$ se tiene invariancia Gauge $\Longrightarrow$ Δ local. Recordemos que el recíproco es siempre cierto (IV.1).

IV.5 CUANTIFICACION DEL CAMPO RS*

Se elige $\lambda_1 = 1$. La ecuación de campo es

$$(\gamma.\pi - m)\psi_\mu - \gamma_\mu\,\pi.\psi - \pi_\mu\,\gamma.\psi + \gamma_\mu\,\gamma.\pi\,\gamma.\psi + mb\,\gamma_\mu\gamma.\psi - T_\mu{}^\lambda\,\psi_\lambda = 0 \qquad (125)$$

$$b = \frac{m - 2m'^{1/2}}{2(2m - m'^{1/2})}$$

La ligadura primaria se deduce de (125) con $\mu = 0$ y multiplicando por γ_0

$$(\vec{\pi} - h_b\vec{\alpha}).\vec{\psi} + m(b-1)\gamma^0\psi^0 - \gamma^0 T_0{}^\lambda\,\psi_\lambda = 0 \qquad (126)$$

y $h_b = \vec{\alpha}.\vec{\pi} + mb\beta$

que se escribe de la forma

$$V^\mu\psi_\mu = 0 \qquad (127.a)$$

$$V^0 = m(1-b)\gamma^0 + \gamma^0 T^{00} \qquad (127.b)$$

$$\vec{V} = \vec{\pi} - h_b\vec{\alpha} + \vec{t} \qquad (127.c)$$

y $t^i = \gamma^0 T_0{}^i$.

Las relaciones de conmutación $C_\mu{}^\lambda$ verifican

$$C_\mu{}^\lambda \,(A^o)_{\lambda\nu} \;=\; g_{\mu\nu} - \Lambda_\mu V_\nu \tag{128}$$

Haciendo $\nu = 0$ se obtiene el multiplicador de Lagrange Λ_μ

$$\Lambda_\mu \;=\; g_{\mu o}\, \bar{V}_o^{1} \tag{129}$$

de manera que:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \delta_{ij} - \tfrac{1}{2}\,\alpha_i \alpha_j \\ C_{oj} &= \bar{V}_o^{1}\, V^i\, C_{ij} \\ C_{jo} &= C_{ji}\, V^{i\dagger}\, (\bar{V}_o^{1})^\dagger \\ C_{oo} &= \bar{V}_o^{1}\, V^i\, C_{ij}\, V^{j\dagger}\, (\bar{V}_o^{1})^\dagger \end{aligned} \tag{130}$$

El tensor $T_{\mu\nu}$ no es necesariamente antisimétrico por cuanto que la teoría tiene 12 grados de libertad

$$T_{\mu\nu} = i q_2 F_{\mu\nu} + q_3 \gamma^5 \tilde{F}_{\mu\nu} + i q_1 F_{\mu\lambda}\, \sigma^\lambda{}_\nu - i q_1^* \sigma_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu + q_4\, g_{\mu\lambda}\, \sigma . F \tag{131}$$

q_2, q_3, q_4 reales y q_1 complejo.

En particular

$$\begin{aligned} T^{oo} &= (q_1 - q_1^* + 2 i q_4)\, \vec{\alpha}.\vec{E} - 2 q_4\, \vec{\Sigma}.\vec{B} \\ T^{oi} &= -i q_2 E^i - q_3 \gamma^5 B^i - q_1 (\vec{E}\times\vec{\Sigma})^i + q_1^* (\vec{B}\times\vec{\alpha})^i \end{aligned} \tag{132}$$

Las relaciones de anticonmutación están definidas si v_o posee inverso. Calculemos su determinante

$$|V_0| = \left| \frac{3m^2}{2(2m - m'/_2)} + (q_1 - q_1^* + 2iq_4)\,\vec{\alpha}.\vec{E} - 2q_4\,\vec{\Sigma}.\vec{B} \right| =$$

$$= \left(\frac{3m^2}{2(2m - m'/_2)}\right)^4 \left[1 - \left((q_1' - q_1'^* + 2iq_4')\,\vec{E} - 2q_4'\,\vec{B} \right)^2 \right] \times$$

$$\left[1 - \left((q_1' - q_1'^* + 2iq_4')\,\vec{E} + 2q_4'\,\vec{B} \right)^2 \right] \qquad (133)$$

siendo $\quad q_i' \equiv \dfrac{2(2m - m'/_2)}{3m^2}\, q_i$

Si q_1 es real y $q_4 = 0 \Longrightarrow T_{\mu\nu}$ es antisimétrico y v_0 invertible. Las relaciones de anticonmutación son locales. En los otros casos v_0 puede no ser invertible.

La conexión entre $|V_0|$ y el determinante característico se establece por medio de las expresiones siguientes

$$n^2 \left((q_1' - q_1'^* + 2iq_4')\,\vec{E} - 2q_4'\,\vec{B} \right)^2 = n^2 \Big[(q_1' - q_1'^*)(q_1' - q_1'^* + 4iq_4)\,\vec{E}^2 +$$

$$+ 4q_4'^2\,(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) - 4q_4'\,(q_1' - q_1'^* + 2iq_4')\,\vec{E}.\vec{B} \Big] = 2q_4'^2\, n^2\; F.F$$

$$- (q_1' - q_1'^*)(q_1' - q_1'^* + 4iq_4')\,(n.F)^2 + q_4'\,(q_1' - q_1'^* + 2iq_4')\, n^2\; F.\tilde{F} \qquad (134)$$

Habiendo utilizado:

$$(n.F)^2 = -\, n^2\, \vec{E}^2$$

$$F.F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$$

$$F.\tilde{F} = F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -\,4\,\vec{E}.\vec{B}$$

y $n_\mu = n(1,\vec{0})$.

$|V_0|$ se escribe de forma invariante:

$$n^4 \, |V_0| = \left(\frac{3m^2}{2(2m-m'/2)}\right)^4 \left[\left((1-2q_4'^2 F^2)n^2 + (q_1'-q_1'^*)(q_1'-q_1'^*+4iq_4')(n.F)^2\right)^2 + \left(i q_4' (q_1' - q_1'^* + 2iq_4')\, n^2\, F.\tilde{F}\right)^2 \right] \quad (135)$$

Comparando con

$$D(n,F)_{RS^*} = (n^2)^6 \left[\left((1-2p^2F^2)n^2 + 4q(2p-q)(n.F)^2 + \right. \right. \left. + \left(2p(p-q)\, F.\tilde{F}\right)^2 \right] \quad (136)$$

se llega a

$$D(n,F)_{RS^*} = \left(\frac{2(2m-m'/2)}{3m^2}\right)^4 n^{16}\, |V_0| \quad (137)$$

$$n_\mu = n(1,\vec{0})$$

Con las identificaciones

$$p = -q_4'$$

$$q = -\frac{i}{2}\,(q_1' - q_1'^*)$$

La conclusión que se extrae de (137) se resume en las implicaciones

V_0 : Invertible $\Longleftrightarrow$ Relaciones Locales de Anticonmutación $\Longleftrightarrow$ Teoría Causal

Es ilustrativo cuantizar RS^* con $\lambda_1 = 0$

$$(A^0)_{\mu\nu} = -\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\gamma_\mu^+ \gamma_\nu \right) \quad (138)$$

Las relaciones $C_{\mu\lambda}$ verifican ahora la ecuación

$$C_\mu{}^\lambda \left(g_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \gamma_\lambda^+ \gamma_\nu \right) = - g_{\mu\nu} + \Lambda_\mu V_\nu \tag{139}$$

Contrayendo con $\gamma^{\nu +}$ por la derecha

$$\Lambda_\mu = \gamma_\mu^+ \left(V.\gamma^+ \right)^{-1} \tag{140}$$

con lo que (139)

$$C_\mu{}^\lambda \left(g_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \gamma_\lambda^+ \gamma_\nu \right) = - g_{\mu\nu} + \gamma_\mu^+ \left(V.\gamma^+ \right)^{-1} V_\nu \tag{141}$$

multiplicando ahora por $V^{\nu +}$ por la derecha y teniendo en cuenta $C.V^+ = 0$

$$\frac{1}{2} C_\mu{}^\lambda \gamma_\lambda^+ = - V_\mu^+ \left(\gamma.V^+ \right)^{-1} + \gamma_\mu^+ \left(V.\gamma^+ \right)^{-1} V.V^+ \left(\gamma.V^+ \right)^{-1} \tag{142}$$

luego:

$$C_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu} + \gamma_\mu^+ \left(V.\gamma^+ \right)^{-1} V_\nu + V_\mu^+ \left(\gamma.V^+ \right)^{-1} \gamma_\nu$$
$$- \gamma_\mu^+ \left(V.\gamma^+ \right)^{-1} V.V^+ \left(\gamma.V^+ \right)^{-1} \gamma_\nu \tag{143}$$

En particular

$$\gamma^\mu C_{\mu\nu} = - 2 \left(V.\gamma^+ \right)^{-1} V_\nu + 2 \left(V.\gamma^+ \right)^{-1} V.V^+ \left(\gamma.V^+ \right)^{-1} \gamma_\nu \tag{144.a}$$

$$\gamma^\mu C_{\mu\nu} \gamma^{\nu +} = \left\{ \gamma.\psi, (\gamma.\psi)^+ \right\} = -2 - 4 \left(V.\gamma^+ \right)^{-1} V.V^+ \left(\gamma.V^+ \right)^{-1} \tag{144.b}$$

En el caso libre $\psi = \psi^{3/2} + \psi^{1/2}$ de donde

$$\left\{ \psi^{3/2}, \psi^{1/2 +} \right\} = \left\{ \psi^{3/2 +}, \psi^{1/2} \right\} = 0 \tag{145}$$

a tiempos iguales, lo que implica

$$C_{\mu\nu} = C^{3/2}_{\mu\nu} + C^{1/2}_{\mu\nu} \tag{146}$$

Dado que

$$\psi^{1/2}_{\mu} = \frac{1}{2m-m_{1/2}} \left(p_\mu + \frac{m-m_{1/2}}{2} \gamma_\mu \right) \gamma.\psi$$

se obtiene

$$C^{1/2}_{ij} = \frac{1}{(2m-m_{1/2})^2} \left(p_i + \frac{m-m_{1/2}}{2} \gamma_j \right) \gamma.C.\gamma^{+} \left(p_j - \frac{m-m_{1/2}}{2} \gamma_j \right) \tag{147}$$

La ligadura en el caso libre es

$$V.\psi = h\psi^{0} - \vec{p}.\vec{\psi} - M\gamma.\psi \tag{148}$$

con $M = \dfrac{m(m-m_{1/2})}{2(2m-m_{1/2})}$

de donde

$$V.\gamma^{+} = m + 2M = \frac{3m^2}{2m-m_{1/2}} \tag{149.a}$$

$$V.V^{+} = (m-M)^2 - 3M^2 = \frac{3m^2(m^2+m^2_{1/2}-4mm_{1/2})}{2(2m-m_{1/2})^2} \tag{149.b}$$

y

$$\gamma.C.\gamma^{+} = -\frac{2(2m-m_{1/2})^2}{3m^2} \tag{150}$$

Se observa claramente que $\gamma.\psi$ es un ghost pues sus relaciones de anticonmutación son negativas. Lo mismo puede decirse de las componentes $\psi_i^{1/2}$

$$C^{1/2}_{ij} = -\frac{2}{3m^2} \left(p_i + \frac{m-m_{1/2}}{2} \gamma_i \right) \left(p_j - \frac{m-m_{1/2}}{2} \gamma_j \right) \tag{151}$$

$C^{3/2}_{ij}$ se calcula a partir de (146) y

$$C_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2m - m^{1/2}}{3m^2}\left(p_i \gamma_j - \gamma_i p_j \right) + \frac{3m^2 + m^2 v_2 - 2 m m^{1/2}}{6m^2} \gamma_i \gamma_j \tag{152}$$

resultando la conocida expresión

$$C^{3/2}_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_i\gamma_j + \frac{1}{3m}\left(p_i \gamma_j - \gamma_i p_j \right) + \frac{2}{3m^2} p_i p_j \tag{153}$$

Definiendo el proyector Q del subespacio de funciones ψ_μ que satisface la ligadura $V.\psi = 0$

$$Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v^+_\mu \left(v.v^+ \right)^{-1} v_\nu \tag{154}$$

Se comprueba que $C_{\mu\nu}$ es el inverso de $(Q A^0 Q)_{\mu\nu}$ en el subespacio Q. En efecto

$$(Q A^0 Q)_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\gamma^+_\mu - v^+_\mu (v.v^+)^{-1} v.\gamma^+ \right)\left(\gamma_\nu - \gamma.v^+ (v.v^+)^{-1} v_\nu \right) \tag{155}$$

$$C_{\mu\lambda}\, Q^\lambda{}_\nu = C_{\mu\nu} \tag{156}$$

utilizando $C\, v^+ = 0$ y la expresión de $C.\gamma^+$ se llega a

$$C_{\mu\lambda} \left(Q A^0 Q \right)^\lambda{}_\nu = Q_{\mu\nu} \tag{157}$$

En interacción el operador V_μ está dado por:

$$V^0 = h - M\gamma^0 + \gamma^0 T^{00} - \frac{1}{2}\gamma^\lambda T_\lambda{}^0 \tag{158.a}$$

$$V^i = \pi^i - M\gamma^i + \gamma^0 T_0{}^i - \frac{1}{2}\gamma^\lambda T_\lambda{}^i \tag{158.b}$$

obteniéndose

$$V.\gamma^{+} = \frac{3m^2}{2m-m_{1/2}}\left(1+\frac{2m-m_{1/2}}{6m^2}\left(2\gamma^0 T^{0\mu}\gamma_\mu^{+}-\gamma_\lambda T^{\lambda\mu}\gamma_\mu^{+}\right)\right) \qquad (159)$$

Actuando con γ_0 a ambos lados de $V.\gamma^{+}$

$$\gamma^0\, V.\gamma^{+}\gamma^0 = \frac{3m^2}{2m-m_{1/2}}\left(1+\frac{2m-m_{1/2}}{6m^2}\left(2T^{0\mu}-\gamma_0\gamma_\lambda T^{\lambda\mu}\right)\gamma_0\gamma_\mu\right) \qquad (160)$$

que puesta de forma invariante con $n_\mu = n(1,\vec{0})$

$$n^2\gamma^0\, V.\gamma^{+}\gamma^0 = \frac{3m^2}{2m-m_{1/2}}\left(n^2+\frac{2m-m_{1/2}}{6m^2}\left(2n.T^{\mu}-\gamma.n\,\gamma_\lambda T^{\lambda\mu}\right)\gamma.n\,\gamma_\mu\right) \qquad (161)$$

deduciéndose una fórmula análoga a (137)

$$D(n,F)_{RS^*} = \left(\frac{2m-m_{1/2}}{3m^2}\right)^4 n^{16}\;|V.\gamma^{+}| \qquad (162)$$

Por último veamos cómo se modifican las relaciones de anticonmutación del campo $\gamma.\psi$ en acoplo mínimo:

$$V.V^{+} = (m-M)^2 - 3M^2 - e\,\vec{\Sigma}.\vec{B} \qquad (163)$$

$$\{\gamma.\psi(x),\,(\gamma.\psi(x'))^{+}\} = -\frac{2(2m-m_{1/2})}{3m^2}\left(1-\frac{2e}{3m^2}\vec{\Sigma}.\vec{B}\right) \qquad (164)$$

Cuando B atraviesa el umbral crítico de Johnson-Sudarshan (164) se hace indefinida sin hacerse singular como en RS (donde aparece $\left(1-\frac{2e}{3m^2}\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)^{-1}$).

§V. LA MATRIZ S

V.1 FUNCIONES DE GREEN LIBRES

Escribamos las ecuaciones libres para un campo Ψ en la forma:

$$\Lambda(i\partial)\,\psi(x) = 0 \tag{1}$$

Las funciones de Green inhomogéneas asociadas a (1) satisfacen

$$\Lambda(i\partial_x)\, S_G(x-y) = \mathbb{1}\ \delta^4(x-y) \tag{2}$$

El divisor de Klein-Gordon $d(p)$ se define por [41]

$$\Lambda(p)\ d(p) = \mathbb{1}\prod_{\ell=1}^{n}(p^2 - m_\ell^2) \tag{3}$$

siendo $\{m_\ell^2\}_{\ell=1}^{n}$ el espectro de masas de (1) obtenido a partir del polinomio Q(p)

$$Q(p) = \det(\Lambda(p)) = Q_0\prod_{\ell=1}^{n}(p^2 - m_\ell^2) \tag{4}$$

Definamos las funciones de Green $S_G(x)$

$$S_G(x) = d(i\partial)\ \Delta_G(x;m_1,\dots,m_n) \tag{5}$$

donde $\Delta_G(x;m_1,..m_n)$ es la función de Green escalar que satisface

$$\prod_{\ell=1}^{n}((i\partial)^2 - m_\ell^2)\ \Delta_G(x;m_1,\dots,m_n) = \delta^4(x) \tag{6}$$

cuya solución es

$$\Delta_G(x; m_1, \dots, m_n) = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \, \Delta_G(x, m_\ell)$$

$$c_\ell = \prod_{k \neq \ell} \frac{1}{m_\ell^2 - m_k^2} \tag{7}$$

$$\left((i\partial)^2 - m_\ell^2\right) \Delta_G(x, m_\ell) = \delta^4(x)$$

El divisor de KG d(p) puede desarrollarse sobre la capa de masas $p^2 = m_l^2$ [17]

$$d(p) = d'_\ell(p) + d''_\ell(p)\,(p^2 - m_\ell^2) \tag{8}$$

de manera que la función $S_G(x)$ se descompone en suma de funciones de Green de masa bien definida $S_G(x,m_l)$ más un término de contacto

$$\begin{aligned} S_G(x) &= \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \, d(i\partial)\, \Delta_G(x, m_\ell) = \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \left(d'_\ell(i\partial) + d''_\ell(i\partial)\left((i\partial)^2 - m_\ell^2\right)\right) \Delta_G(x, m_\ell) = \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \, d'_\ell(i\partial)\, \Delta_G(x, m_\ell) + \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \, d''_\ell(i\partial)\, \delta^4(x) = \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} S_G(x, m_\ell) + \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \, d''_\ell(i\partial)\, \delta^4(x) \end{aligned} \tag{9}$$

Si (1) es una familia paramétrica de ecuaciones, como en el caso del campo ψ_μ, será posible mediante una elección particular de los parámetros eliminar el término de contacto [18].

El divisor de KG $d_{\mu\nu}(p)$ de la familia de ecuaciones (I.21) satisface

$$[(\gamma.p-m)\,g_\mu^{\lambda} - \lambda_1(\gamma_\mu p^\lambda + p_\mu \gamma^\lambda) + \lambda_2 \gamma_\mu \gamma.p\,\gamma^\lambda + m\lambda_3 \gamma_\mu \gamma^\lambda]\; d_{\lambda\nu}(p) =$$

$$= -\,g_{\mu\nu}\,A \qquad (10)$$

donde $A = \prod_{l}(p^2 - m_l^2)$. Contrayendo (10) con γ^μ y p^μ

$$2(1-2\lambda_1)\,p^\lambda d_{\lambda\nu} - (1+\lambda_1-4\lambda_2)\,\gamma.p\,\gamma^\lambda d_{\lambda\nu} +$$

$$+\; m(4\lambda_3-1)\,\gamma^\lambda d_{\lambda\nu} = -\,\gamma_\nu A \qquad (11a)$$

$$((1-\lambda_1)\gamma.p - m)\,p^\lambda d_{\lambda\nu} + (\lambda_2-\lambda_1)\,p^2\gamma^\lambda d_{\lambda\nu} +$$

$$+\; m\lambda_3\,\gamma.p\,\gamma^\lambda d_{\lambda\nu} = -\,p_\nu A \qquad (11b)$$

de la combinación de ambas

$$(2\lambda_2 - 3\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1)\,p^2\gamma^\lambda d_{\lambda\nu} - 2m(2\lambda_2-\lambda_1-\lambda_3)\,\gamma.p\,\gamma^\lambda d_{\lambda\nu} -$$

$$-\,m^2(4\lambda_3-1)\,\gamma^\lambda d_{\lambda\nu} = (m\gamma_\nu + (1-\lambda_1)\gamma_\nu\gamma.p - 2\lambda_1 p_\nu)\,A \qquad (12)$$

El cálculo de $d(p, \lambda'_i)$ para un conjunto particular de parámetro $\{\lambda'_i\}$ determina $d(p, \lambda_i)$ para cualquier $\{\lambda_i\}$ por medio de la transformación:

$$\psi'_\mu = T_\mu^{\;\lambda}(\theta)\,\psi_\lambda = \psi_\mu + \theta\,\gamma_\mu\,\gamma.\psi$$

$$\Lambda^{\nu\rho}(i\partial, \lambda_i) = T^{\nu\mu}(\theta)\,\Lambda_{\mu\lambda}(i\partial, \lambda'_i)\,T^{\lambda\rho}(\theta) \qquad (13)$$

$$d_{\mu\nu}(p, \lambda_i) = T^{-1}_{\mu\lambda}(\theta)\,d^{\lambda\rho}(p, \lambda'_i)\,T^{-1}_{\rho\nu}(\theta)$$

donde $T^{-1}_{\mu\lambda}(\theta) = T_{\mu\lambda}\left(\frac{-\theta}{1+4\theta}\right)$

Se expone a continuación el cálculo de divisores de KG para RS, RS*, RS**

a1) El divisor de KG para RS con la elección $\vec{\lambda}' = (0,\ 1/2,\ 1)$ es:

$$d^{RS}_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu} (\not{p} + m) + \frac{1}{6m^2} (\not{p} + m) \gamma_\mu (\not{p} + 2m) \gamma_\nu (\not{p} + m) \tag{14}$$

que se escribe de la forma

$$d^{RS}_{\mu\nu} = - g_{\mu\nu} (\not{p} + m) + \frac{1}{6m^2} \left[\gamma_\mu (-\not{p} + m) + 2p_\mu \right] (\not{p} + 2m) \left[(-\not{p} + m) \gamma_\nu + 2p_\nu \right] \tag{15}$$

y utilizando

$$(-\not{p} + m)^2 = 2m(-\not{p} + m) + (p^2 - m^2)$$

$$(-\not{p} + m)(\not{p} + 2m) = m(m - \not{p}) + (m^2 - p^2)$$

$d^{RS}_{\mu\nu}$ se descompone según (8)

$$d^{RS}_{\mu\nu} = d^{\prime 3/2}_{\mu\nu} + d^{\prime\prime 3/2}_{\mu\nu} (p^2 - m^2) \tag{16a}$$

siendo

$$d^{\prime 3/2}_{\mu\nu} = -(\not{p} + m) \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{1}{3m} (\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu) - \frac{2}{3m^2} p_\mu p_\nu \right) \tag{16b}$$

$$d^{\prime\prime 3/2}_{\mu\nu} = - \frac{1}{6m^2} (\not{p} \gamma_\mu \gamma_\nu + 2 \gamma_\mu p_\nu) \tag{16c}$$

La generalización para todo valor de λ_1 se obtiene a través de (13) con $\theta = - \frac{\lambda_1}{2}$ $\left(\lambda_1' = \frac{\lambda_1 + 2\theta}{1 + 4\theta} = 0 \right)$

$$d^{RS}_{\mu\nu}(p, \lambda_1) = \left(g_{\mu\lambda} + \frac{\lambda_1}{2(1 - 2\lambda_1)} \gamma_\mu \gamma_\lambda \right) d^{\lambda\rho}_{RS}(p, 0) \left(g_{\rho\nu} + \frac{\lambda_1}{2(1 - 2\lambda_1)} \gamma_\rho \gamma_\nu \right) \tag{17}$$

(17) se descompone según (16a) siendo [24]

$$d'^{3/2}_{\mu\nu}(P,\lambda_1) = d'^{3/2}_{\mu\nu}(P,0) \tag{18a}$$

$$d''^{3/2}_{\mu\nu}(P,\lambda_1) = \frac{\lambda_1 - 1}{3m^2(1-2\lambda_1)}\left(\frac{1-\lambda_1}{2(1-2\lambda_1)}\not{p}\,\gamma_\mu\gamma_\nu + \frac{\lambda_1 m}{1-2\lambda_1}\gamma_\mu\gamma_\nu + \right.$$

$$\left. + \gamma_\mu P_\nu - \frac{\lambda_1}{1-2\lambda_1} P_\mu \gamma_\nu\right) \tag{18b}$$

Notar que λ_1 solo aparece en $d''^{3/2}_{\mu\nu}$ y si $\lambda_1 = 1$

$$d''^{3/2}_{\mu\nu}(P,1) = 0$$

2) El divisor de KG de RS* para $\vec{\lambda}' = (0,\ 1/2,\ b \neq 1)$ y $m \neq m\ 1/2$ es

$$d^{RS^*}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\frac{(p^2-m^2)(p^2-m^2_{1/2})}{\not{p}-m} - \frac{1}{4m(b-1)}(\not{p}+m)\gamma_\mu(\not{p}+2mb)(\not{p}+m_{1/2})\gamma_\nu(\not{p}+m) \tag{19}$$

Desarrollando en torno a $p^2 = m^2$

$$d^{RS^*}_{\mu\nu} = d'^{3/2}_{RS^*\mu\nu} + d''^{3/2}_{RS^*\mu\nu}(p^2-m^2) \tag{20a}$$

donde

$$d'^{3/2}_{RS^*\mu\nu} = (m^2 - m^2_{1/2})\, d'^{3/2}_{RS\,\mu\nu} \tag{20b}$$

$$d''^{3/2}_{RS^*\mu\nu} = -g_{\mu\nu}(\not{p}+m) - \frac{1}{2m(b-1)}\Big[\frac{1}{2}\gamma_\mu\big(p^2+m^2+(2mb+m_{1/2}-2m)\not{p}\big)\gamma_\nu -$$

$$- \gamma_\mu(\not{p}+2mb+m_{1/2}-m)P_\nu - P_\mu(\not{p}+2mb+m_{1/2}-m)\gamma_\nu + 2P_\mu P_\nu\Big] \tag{20c}$$

Por la transformación (13) se obtiene $\forall\lambda_1\ \left(\tilde{\lambda}_1 \equiv \frac{\lambda_1}{2(1-2\lambda_1)}\right)$

$$d'^{3/2}_{RS^*}(P,\lambda_1)_{\mu\nu} = d'^{3/2}_{RS^*}(P,0)_{\mu\nu} \tag{21a}$$

$$d''^{3/2}_{RS^*}(p,\lambda_1)_{\mu\nu} = d''^{3/2}_{RS^*}(p,0)_{\mu\nu} + \frac{\tilde{\lambda}_1}{2m(b-1)}\gamma_\mu(\not p + m_{1/2})\gamma_\nu(\not p + m) +$$

$$+ \frac{\tilde{\lambda}_1}{2m(b-1)}(\not p + m)\gamma_\mu(\not p + m_{1/2})\gamma_\nu + \frac{2\tilde{\lambda}_1^2}{2m(b-1)}\gamma_\mu(\not p + m_{1/2})(-\not p + 2m)\gamma_\nu \qquad (21b)$$

Desarrollando en torno a $p^2 = m^2_{1/2}$ $(m \neq m_{1/2})$

$$d^{RS^*}_{\mu\nu} = d'^{1/2}_{RS^*\mu\nu} + d''^{1/2}_{RS^*\mu\nu}(p^2 - m^2_{1/2}) \qquad (22a)$$

donde

$$d'^{1/2}_{RS^*\mu\nu} = \frac{2(m^2 - m^2_{1/2})}{3m^2}\left(p_\mu + \frac{m-m_{1/2}}{2}\gamma_\mu\right)(\not p + m_{1/2})\left(p_\nu + \frac{m-m_{1/2}}{2}\gamma_\nu\right) \qquad (22b)$$

$$d''^{1/2}_{RS^*\mu\nu} = -g_{\mu\nu}(\not p + m) - \frac{1}{2m(b-1)}\Big[\frac{1}{2}\gamma_\mu\left(p^2 + m^2_{1/2} + (2mb + m_{1/2} - 2m)\not p\right)\gamma_\nu -$$

$$- \gamma_\mu(\not p + 2mb + m_{1/2} - m)p_\nu - p_\mu(\not p + 2mb + m_{1/2} - m)\gamma_\nu + 2p_\mu p_\nu\Big] \qquad (22c)$$

Las correspondientes expresiones $\forall \lambda_1$ son:

$$d'^{1/2}_{RS^*}(p,\lambda_1)_{\mu\nu} = \frac{2(m^2 - m^2_{1/2})}{3m^2}\left(p_\mu + \left(\frac{m-m_{1/2}}{2} + (2m - m_{1/2})\tilde{\lambda}_1\right)\gamma_\mu\right)(\not p + m_{1/2})\left(p_\nu + \left(\frac{m-m_{1/2}}{2} + (2m - m_{1/2})\tilde{\lambda}_1\right)\gamma_\nu\right) \qquad (23a)$$

$$d''^{1/2}_{RS^*}(p,\lambda_1)_{\mu\nu} = d''^{1/2}_{RS^*}(p,0)_{\mu\nu} + \frac{\tilde{\lambda}_1}{2m(b-1)}\gamma_\mu(\not p + m_{1/2})\gamma_\nu(\not p + m) +$$

$$+ \frac{\tilde{\lambda}_1}{2m(b-1)}(\not p + m)\gamma_\mu(\not p + m_{1/2})\gamma_\nu + \frac{2\tilde{\lambda}_1^2}{2m(b-1)}\gamma_\mu(\not p + m_{1/2})(2m - \not p)\gamma_\nu -$$

$$- \frac{2(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_1^2)(m^2_{1/2} - m^2)}{2m(b-1)}\gamma_\mu\gamma_\nu \qquad (23b)$$

Comparando (21b) y (23b)

$$d''^{1/2}_{RS^*}(P,\lambda_1)_{\mu\nu} = d''^{3/2}_{RS^*}(P,\lambda_1)_{\mu\nu} + \frac{(m^2-m_{1/2}^2)(1+2\tilde{\lambda}_1)^2}{4m(b-1)}\gamma_\mu\gamma_\nu$$

por tanto el término de contacto es

$$c_{1/2}\, d''^{1/2}_{RS^*}(P,\lambda_1)_{\mu\nu} + c_{3/2}\, d''^{3/2}_{RS^*}(P,\lambda_1)_{\mu\nu} = \frac{(1-\lambda_1)^2}{4m(1-b)(1-2\lambda_1)^2}\gamma_\mu\gamma_\nu \qquad (24)$$

Si se elige $\lambda_1 = 1$

$$S^{RS^*}_{G\,\mu\nu}(x) = S^{3/2}_{G\mu\nu}(x) + S^{1/2}_{G\mu\nu}(x) \qquad (25a)$$

$$S^{3/2}_{G\,\mu\nu}(x) = -(\not{P}+m)\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu - \frac{1}{3m}(\gamma_\mu P_\nu - \gamma_\nu P_\mu) - \frac{2}{3m^2}P_\mu P_\nu\right)\Delta_G(x,m) \qquad (25b)$$

$$S^{1/2}_{G\mu\nu}(x) = -\frac{2}{3m^2}\left(P_\mu - \frac{m}{2}\gamma_\mu\right)(\not{P}+m_{1/2})\left(P_\nu - \frac{m}{2}\gamma_\nu\right)\Delta_G(x,m_{1/2}) \qquad (25c)$$

con $\quad P_\mu = i\partial_\mu$

3) Las funciones de Green RS** calculadas para $\lambda_1 = 1$ tienen la misma estructura que (25) (si $m_1 \neq m_2$)

$$S^{RS^{**}}_{G\mu\nu}(x) = S^{3/2}_{G\mu\nu}(x) + S^{1}_{G\mu\nu}(x) + S^{2}_{G\mu\nu}(x) \qquad (26a)$$

$$S^{1}_{G\mu\nu}(x) = \frac{2}{3m^2}\,\frac{2m-m_2}{m_2-m_1}\left(P_\mu - \frac{m}{2}\gamma_\mu\right)(\not{P}+m_1)\left(P_\nu - \frac{m}{2}\gamma_\nu\right)\Delta_G(x,m_1) \qquad (26b)$$

$$S^{2}_{G\mu\nu}(x) = \frac{2}{3m^2}\,\frac{2m-m_1}{m_1-m_2}\left(P_\mu - \frac{m}{2}\gamma_\mu\right)(\not{P}+m_2)\left(P_\nu - \frac{m}{2}\gamma_\nu\right)\Delta_G(x,m_2) \qquad (26c)$$

los coeficientes que multiplican a $\overset{1}{S}_{G\mu\nu}$ y $\overset{2}{S}_{G\mu\nu}$ se deducen imponiendo a (26a) que verifique (2) y utilizando las relaciones entre los parámetros λ_i y las masas m_1 y m_2

$$m_1 + m_2 = \frac{2(2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)}{2\lambda_2 - 3\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1}\, m$$

$$m_1 m_2 = \frac{1 - 4\lambda_3}{2\lambda_2 - 3\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1}\, m^2 \qquad (27)$$

4) El caso $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 3/8$ no puede obtenerse a partir de RS* mediante la transformación (13). De (10) y (11) con $\lambda_3 \neq 1/4$ se deduce:

$$S_{G\mu\nu}(x) = S^{3/2}_{G\mu\nu}(x) + S^{1/2}_{G\mu\nu}(x) + \frac{1}{4m(1-4\lambda_3)}\gamma_\mu\gamma_\nu\,\delta^4(x) \qquad (28a)$$

$$S^{3/2}_{G\mu\nu}(x) = -(\not{p}+m)\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu - \frac{1}{3m}(\gamma_\mu P_\nu - \gamma_\nu P_\mu) - \frac{2}{3m^2}P_\mu P_\nu\right)\Delta_G(x,m) \qquad (28b)$$

$$S^{1/2}_{G\mu\nu}(x) = -\frac{2}{3m^2}\left(P_\mu - \frac{m}{2}\gamma_\mu\right)(\not{p}+2m)\left(P_\nu - \frac{m}{2}\gamma_\nu\right)\Delta_G(x,2m) \qquad (28c)$$

Fórmulas que coinciden con (25) tomando $m_{1/2} = 2m$, salvo en el término de contacto dependiente de λ_3, que solo aparece para las funciones de Green inhomogeneas.

Si $\lambda_3 = 1/4$ resulta que $\Lambda(i\partial)$ no puede invertirse $\Longrightarrow \nexists$ divisor de KG. Esto es consecuencia de la invariancia Gauge de la teoria bajo transformaciones $\psi_\mu \to \psi_\mu + \gamma_\mu\Lambda$ (I-34)

Si definimos

$$d^{3/2}_{\mu\nu}(p) = -(\not p+m)\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu - \frac{1}{3m}(\gamma_\mu p_\nu - p_\mu\gamma_\nu) - \frac{2}{3m^2}p_\mu p_\nu\right) =$$

$$= -\left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu + \frac{1}{3m}(\gamma_\mu p_\nu - p_\mu\gamma_\nu) - \frac{2}{3m^2}p_\mu p_\nu\right)(\not p+m) \qquad (29a)$$

$$d^{\ell}_{\mu\nu}(p) = c_\ell\left(p_\mu - \frac{m}{2}\gamma_\mu\right)(\not p + m_\ell)\left(p_\nu - \frac{m}{2}\gamma_\nu\right) \qquad (29b)$$

$\ell = 1/2,\ 1,\ 2$

donde $c_l = -\frac{2}{3m^2}\ ,\ \frac{2}{3m^2}\frac{2m-m_2}{m_2-m_1}\ ,\ \frac{2}{3m^2}\frac{2m-m_1}{m_1-m_2}$

$m_l = m_{1/2}\ ,\quad m_1\ ,\quad m_2$

podemos escribir las siguientes relaciones profusamente utilizadas en §V.5

$$\gamma^\mu d^{3/2}_{\mu\nu} = d^{3/2}_{\nu\mu}\gamma^\mu = \frac{2}{3m^2}\left(p_\nu - \frac{m}{2}\gamma_\nu\right)(p^2 - m^2) \qquad (30a)$$

$$\gamma^\mu d^{\ell}_{\mu\nu} = c_\ell(\not p - 2m)(\not p + m_\ell)\left(p_\nu - \frac{m}{2}\gamma_\nu\right) =$$

$$= c_\ell\Big((m_\ell - 2m)(\not p + m_\ell) + (p^2 - m_\ell^2)\Big)\left(p_\nu - \frac{m}{2}\gamma_\nu\right) \qquad (30b)$$

$$d^{\ell}_{\mu\nu}\gamma^\nu = c_\ell\left(p_\mu - \frac{m}{2}\gamma_\mu\right)(\not p + m_\ell)(\not p - 2m) =$$

$$= c_\ell\left(p_\mu - \frac{m}{2}\gamma_\mu\right)\Big((m_\ell - 2m)(\not p + m_\ell) + (p^2 - m_\ell^2)\Big) \qquad (30c)$$

$$\gamma^\mu d^{3/2}_{\mu\nu}\gamma^\nu = \frac{2}{3m^2}(\not p - 2m)(p^2 - m^2) \qquad (30d)$$

$$\gamma^{\mu} d^{\ell}_{\mu\nu} \gamma^{\nu} = c_{\ell} \, (\not{p} - 2m)^2 \, (\not{p} + m_{\ell}) \tag{30e}$$

$$p^{\mu} d^{3/2}_{\mu\nu} = \frac{1}{m} \left(p_{\nu} - \frac{1}{3} \not{p} \gamma_{\nu} + \frac{2}{3m} \not{p} p_{\nu} \right) \left(p^2 - m^2 \right) \tag{30f}$$

$$d^{3/2}_{\mu\nu} p^{\nu} = \frac{1}{m} \left(p_{\mu} - \frac{1}{3} \gamma_{\mu} \not{p} + \frac{2}{3m} \not{p} p_{\mu} \right) \left(p^2 - m^2 \right) \tag{30g}$$

$$p^{\mu} d^{\ell}_{\mu\nu} = c_{\ell} \left(p^2 - \frac{m}{2} \not{p} \right) \left(\not{p} + m_{\ell} \right) \left(p_{\nu} - \frac{m}{2} \gamma_{\nu} \right) \tag{30h}$$

$$d^{\ell}_{\mu\nu} p^{\nu} = c_{\ell} \left(p_{\mu} - \frac{m}{2} \gamma_{\mu} \right) \left(\not{p} + m_{\ell} \right) \left(p^2 - \frac{m}{2} \not{p} \right) \tag{30i}$$

$$p^{\mu} d^{3/2}_{\mu\nu} p^{\nu} = \frac{2}{3m} \left(\not{p} + m \right) p^2 \left(p^2 - m^2 \right) \tag{30j}$$

$$p^{\mu} d^{\ell}_{\mu\nu} p^{\nu} = c_{\ell} \left(p^2 - \frac{m}{2} \not{p} \right)^2 \left(\not{p} + m_{\ell} \right) \tag{30k}$$

Es interesante observar la aparición de términos de contacto al contraer $S_{G\mu\nu}$ con γ^{μ} y $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$

$$\gamma^{\mu} S^{RS}_{G\mu\nu}(x) = \frac{2}{3m^2} \left(p_{\nu} - \frac{m}{2} \gamma_{\nu} \right) \delta^4(x) \tag{31a}$$

$$\gamma^{\mu} S^{RS^{*}}_{G\mu\nu}(x) = \frac{2(2m - m_{1/2})}{3m^2} \left(\not{p} + m_{1/2} \right) \left(p_{\nu} - \frac{m}{2} \gamma_{\nu} \right) \Delta_G(x, m_{1/2}) \tag{31b}$$

$$\gamma^{\mu} S^{RS^{**}}_{G\mu\nu}(x) = \frac{2(2m - m_1)(2m - m_2)}{3m^2 (m_1 - m_2)} \Big[\left(\not{p} + m_1 \right) \left(p_{\nu} - \frac{m}{2} \gamma_{\nu} \right) \Delta_G(x, m_1) -$$

$$- \left(\not{p} + m_2 \right) \left(p_{\nu} - \frac{m}{2} \gamma_{\nu} \right) \Delta_G(x, m_2) \Big] \tag{31c}$$

$$\gamma^{\mu} S^{RS}_{G\mu\nu}(x) \gamma^{\nu} = \frac{2}{3m^2} \left(\not{p} - 2m \right) \delta^4(x) \tag{31d}$$

$$\gamma^\mu S^{RS^*}_{6\,\mu\nu}(x)\,\gamma^\nu = -\frac{2(2m-m_{1/2})^2}{3m^2}\,(\not{\partial}+m_{1/2})\,\Delta_6(x,m_{1/2}) + \frac{2(2m-m_{1/2})}{3m^2}\,\delta^4(x) \qquad (31e)$$

$$\gamma^\mu S^{RS^{**}}_{6\,\mu\nu}(x)\,\gamma^\nu = -\frac{2(2m-m_1)(2m-m_2)}{3m^2(m_1-m_2)}\Big[(2m-m_1)(\not{\partial}+m_1)\,\Delta_6(x,m_1) -$$

$$- (2m-m_2)(\not{\partial}+m_2)\,\Delta_6(x,m_2)\Big] \qquad (31f)$$

Los divisores $d^{l}_{\mu\nu}(p)\,(l = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1,2)$ se hallan diretamente relacionados con los proyectores de spin y masa definidos:

$$d^{l}_{\mu\nu}(p)\Big|_{\substack{p^2=m^2_l\\ p^0>0}} = 2m_l\,\varepsilon_l \sum_\lambda u^{l}_\mu(p,\lambda)\,\bar{u}^{l}_\nu(p,\lambda) \qquad (32a)$$

$$d^{l}_{\mu\nu}(-p)\Big|_{\substack{p^2=m^2_l\\ p^0>0}} = -2m_l\,\varepsilon_l \sum_\lambda v^{l}_\mu(p,\lambda)\,\bar{v}^{l}_\nu(p,\lambda) \qquad (32b)$$

donde ε_l es ± 1 según que las soluciones de frecuencia postiva u^{l}_μ sean de nor_ ma positiva o negativa

$$\varepsilon_{3/2} = +1\ ,\quad \varepsilon_{1/2} = -1\ ,\quad \varepsilon_1 = \text{signo}\,\frac{2m-m_2}{m_2-m_1}\ ,\quad \varepsilon_2 = \text{signo}\,\frac{2m-m_1}{m_1-m_2}$$

V.2 FUNCIONES DE GREEN Y RELACIONES DE (ANTI)CONMUTACION

La función de Green homogénea libre S(x,x') adopta una forma sencilla por medio de (32) (por simplicidad se suprimen los índices del campo)

$$S(x,x') = \sum_l S(x,x';m_l) = \sum_l d^{l}(i\partial_x)\,\Delta(x-x',m_l) =$$

$$= -i\sum_l \varepsilon_l \sum_i \left(u^{l}_i(x)\,\bar{u}^{l}_i(x') + v^{l}_i(x)\,\bar{v}^{l}_i(x')\right) \qquad (33)$$

donde $\sum_i \equiv \int d^3p \sum_\lambda$

$$u_i^\ell(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m\ell}{E\ell}} \; u^\ell(p,\lambda)\, \bar{e}^{\,i\,p\cdot x} \tag{34a}$$

$$v_i^\ell(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m\ell}{E\ell}} \; v^\ell(p,\lambda)\, e^{\,i\,p\cdot x} \tag{34b}$$

$\{u_i^l(x),\ v_i^l(x)\}$ so un conjunto completo y ortonormal respecto la métrica A^o

$$\int d^3x \;\; u_i^{\ell +}(x)\, A^o u_{i'}^{\ell'}(x) \;=\; \int d^3x \;\; v_i^{\ell +}(x)\, A^o\, v_{i'}^{\ell'}(x) \;=\; \varepsilon_\ell\, \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{ii'} \tag{35a}$$

$$\int d^3x \;\; u_i^{\ell +}(x)\, A^o\, v_{i'}^{\ell'}(x) \;=\; \int d^3x \;\; v_i^{\ell +}(x)\, A^o\, u_{i'}^{\ell'}(x) \;=\; 0 \tag{35b}$$

(33) se ha estableido en el caso libre, pero es igualmente válida en interacción elFgiendo $u_i^l()$ y $v_i^l(x)$ libre para un tiempo t_o anterior a la interacción y resolviendo e problema de Cauchy para tiempos posteriores.

Como consecuencia le (35)

$$\psi(x) = \int d^3x' \;\; S(x,x')\; \beta^o\; \psi(x') \tag{36a}$$

y en forma invariante

$$\psi(x) = \int d\sigma'_\mu \;\; S(x,x')\; \beta^\mu\; \psi(x') \tag{36b}$$

$\psi(x)$ en (36) represent el campo clásico.

Definamos a continuación el campo cuántico [12]

$$\psi(x) = \sum_{\ell,i} a^{in}_{\ell,i}\, u^{\ell}_i(x) + b^{in\dagger}_{\ell,i}\, v^{\ell}_i(x) \tag{37a}$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{\ell,i} a^{in\dagger}_{\ell,i}\, \bar{u}^{\ell}_i(x) + b^{in}_{\ell,i}\, \bar{v}^{\ell}_i(x) \tag{37b}$$

Si $x_0 \rightarrow -\infty$ $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$ coinciden con los campos libres entrantes.

Imponiendo relaciones de anticonmutación canónicas para los operadores de creación y destrucción

$$\{ a^{in}_{\ell,i} , a^{in\dagger}_{\ell',i'} \} = \{ b^{in}_{\ell,i} , b^{in\dagger}_{\ell',i'} \} = \varepsilon_\ell\, \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{ii'} \tag{38}$$

y nulas el resto, se obtiene

$$\{ \psi(x) , \bar{\psi}(x') \} = \sum_{\ell,i} \varepsilon_\ell \left(u^{\ell}_i(x)\, \bar{u}^{\ell}_i(x') + v^{\ell}_i(x)\, \bar{v}^{\ell}_i(x') \right) \tag{39}$$

luego

$$\{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \} = i\, S(x,x') \tag{40}$$

Es importante notar que relaciones de anticonmutación positivas en (38) conducen a (40) si y solo si $\varepsilon_\ell = 1$, $\forall \ell$. En el estudio que nos ocupa tan sólo el campo RS de ocho componentes verifica este requisito. Sin embargo, para RS* el campo de spin 1/2 tiene norma negativa ($\varepsilon_{1/2} = -1$) y en RS** al menos uno de los campos es de norma negativa.

Una modificación de (38) en una teoría con ghosts presenta el delicado problema de inestabilidad en el sentido de Wightman[11], es decir, relaciones de (anti)conmutación de campos salientes dependientes de la interacción con campos externos y por tanto distintos de las relaciones de los campos entrantes. Si por el contrario, (40) es válida este problema no existe, empero la teoría es, en general, no unitaria y carente de interpretación probabilista.

$$\{ \psi^{in}(x), \bar{\psi}^{in}(x') \} = i\, S(x-x') = \{ \psi^{out}(x), \bar{\psi}^{out}(x') \}$$

Mostraremos finalmente que la cuantificación de acuerdo con el Principio de Acción conduce a (40) cuando $x_o = x'_o$

$$\delta\psi(x) = -i \int d^3x' \left(\{ \psi(x), \pi(x') \} \, \delta\psi(x') - \pi(x') \{ \psi(x), \delta\psi(x') \} \right) =$$

$$= -i \int d^3x' \left(\{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \} \beta^0 \, \delta\psi(x') - \bar{\psi}(x') \beta^0 \{ \psi(x), \delta\psi(x') \} \right) \quad (41)$$

relación que es compatible con (36a)

$$\delta\psi(x) = \int d^3x' \; S(x,x') \, \beta^0 \, \delta\psi(x') \quad (42)$$

si se verifica

$$\{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \}_{x_o = x'_o} = i\, S(x,x') \quad (43a)$$

$$\{ \psi(x), \psi(x') \}_{x_o = x'_o} = 0 \quad (43b)$$

Observar que al obtener (42) S(x,x') es un c-número por cuanto depende de c-campos (extemos).

V.3 η-UNITARIEDAD Y UNITARIEDAD DE LA MATRIZ S

Las ecuaciones (1) y (2) en interacción

$$\left(\Lambda(i\partial) + B(x)\right)\psi(x) = 0 \tag{44}$$

$$\left(\Lambda(i\partial_x) + B(x)\right) S_G(x,y;B) = \mathbb{1}\, \delta^4(x-y) \tag{45}$$

conducen a las ecuaciones integrales

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int d^4y \; S_G(x-y)\, B(y)\, \psi(y) \tag{46}$$

$$S_G(x,y;B) = S_G(x-y) - \int d^4z \; S_G(x-z)\, B(z)\, S_G(z,y;B) \tag{47}$$

siendo $\psi_0(x)$ solución de (44) libre y $S_G(x-y)$ una función de Green libre e inhomogenea.

Conocida $S_G(x,y;B)$ se obtiene la solución de (46)

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int d^4y \; S_G(x,y;B)\, B(y)\, \psi_0(y) \tag{48}$$

Introduciendo $\psi(x)$ dado por (48) en el segundo miembro de (46) resulta:

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int d^4y \; S_G(x-y)\, B(y)\, \psi_0(y) + \\ + \int d^4y\, d^4z \; S_G(x-y)\, B(y)\, S_G(y,z;B)\, B(z)\, \psi_0(z) \tag{49}$$

donde (49) es una solución del problema de scattering.

Si elegimos $\quad \psi(x) \underset{x_0 \to -\infty}{\longrightarrow} \psi_0(x) = \psi^{in}(x)$

$\psi(x)$ resulta:

$$\psi(x) = \psi^{in}(x) - \int d^4y \; S_R(x-y)\, B(y)\, \psi^{in}(y) +$$

$$+ \int d^4y\, d^4z \; S_R(x-y)\, B(y)\, S_R(y,z;B)\, B(z)\, \psi^{in}(z) \tag{50}$$

donde S_R es la función de Green retardada.

Análogamente con datos iniciales $\psi^{out}(x)$ en $x_o \to +\infty$

$$\psi(x) = \psi^{out}(x) - \int d^4y \; S_A(x-y)\, B(y)\, \psi^{out}(y) +$$

$$+ \int d^4y\, d^4z \; S_A(x-y)\, B(y)\, S_A(y,z;B)\, B(z)\, \psi^{out}(z) \tag{51}$$

donde S_A es la función de Green avanzada.

Supongamos $B(x)$ tendiendo a cero en el infinito de forma que $\psi(x)$ en (50) ($x_o \to +\infty$) es una solución de la ecuación (44) libre.

Sea $\{\psi_n(x)\}$ un conjunto completo de funciones que satisfacen la ecuación (1). Si $\psi^{in}(x) = \psi_i(x)$ entonces

$$\lim_{x_o \to -\infty} \psi(x) = \psi_i(x) \tag{52a}$$

$$\lim_{x_o \to +\infty} \psi(x) = \sum_f \psi_f(x)\, S_{fi} \tag{52b}$$

Los coeficientes S_{fi} son los elementos de la matriz S entre los estados mo noparticulares libres f e i del conjunto $\{\psi_n(x)\}$. Su expresión se establece a partir de (50). En efecto

$$S_R(x-y) = \sum_{\ell} S_R(x-y, m_\ell) = \sum_{\ell} d^{\ell}(i\partial_x)\, \Delta_R(x-y, m_\ell) =$$

$$= -i\,\theta(x^0-y^0) \sum_n \epsilon_n\, \psi_n(x)\, \overline{\psi}_n(y) \;+$$
$$+\; \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left[\, d^{\ell}(i\partial_x)\, ,\, \epsilon(x^0-y^0) \right] \Delta(x-y, m_\ell) \qquad (53)$$

donde $\quad \Delta_R(x-y, m_\ell) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}\, 2E_\ell}\, \theta(x^0-y^0)\, \left(e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right)$

siendo $\psi_n(x)$ con $n = (\pm, l, p, \lambda)$ las funciones (34a,b) de energía positiva y negativa ($\pm$)

$$\epsilon_n \equiv \epsilon_\ell$$
$$\sum_n \equiv \sum_{\ell} \sum_{\lambda} \int d^3p$$

Observamos que el segundo sumando en (53) es proporcional a $\delta^4(x-y)$ por lo cual desaparece cuando $x_0 \to +\infty$. Introduciendo (53) en (50) y tomando el límite $x_0 \to +\infty$ resulta de la comparación con (52b) [12]

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\,\epsilon_f \int d^4x\, \overline{\psi}_f(x)\, B(x)\, \psi_i(x) - i\,\epsilon_f \int d^4x\, d^4y\, \overline{\psi}_f(x)\, B(x)\, S_R(x,y;B)\, B(y)\, \psi_i(y) \qquad (54)$$

En el espacio de momentos

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, \psi(p)\, e^{-ip\cdot x}$$

$$B(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2}\, \hat{B}(p)\, e^{-ip\cdot x}$$

$$S_R(x,y;B) = \int \frac{d^4r\, d^4s}{(2\pi)^4}\, \hat{S}_R(r,s;B)\, e^{-irx+isy}$$

se tiene

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\,\epsilon_f\,(2\pi)^2\,\overline{\psi}_f(p_f)\,\hat{B}(p_f - p_i)\,\psi_i(p_i)$$

$$- i\,\epsilon_f \int d^4r\, d^4s\, \overline{\psi}_f(p_f)\,\hat{B}(p_f - r)\,\hat{S}_R(r,s;B)\,\hat{B}(s-p_i)\,\psi_i(p_i) \tag{55}$$

La conservación del producto escalar en la evolución

$$\int d^3x\; \psi^{in+}(x)\, A^0\, \psi^{in}(x) = \int d^3x\; \psi^{out+}(x)\, A^0\, \psi^{out}(x) \tag{56}$$

implica la unitariedad de la matriz S respecto a la métrica definida por (56), es decir

$$\sum_n S^*_{nf}\,\epsilon_n\,S_{ni} = \sum_n S_{fn}\,\epsilon_n\,S^*_{in} = \epsilon_f\,\delta_{fi} \tag{57}$$

En efecto:

$$\sum_n S^*_{nf}\;\epsilon_n\;S_{ni} =$$

$$= \sum \Big(\delta_{nf} - i\,\epsilon_n \int d^4x\; \overline{\psi}_f(x)\,B(x)\,\psi_n(x) + i\,\epsilon_n \int d^4x\,d^4y\; \overline{\psi}_f(x)\,B(x)\,S_A(x,y;B)\,B(y)\,\psi_n(y)\Big) \times$$

$$\epsilon_n \Big(\delta_{ni} + i\,\epsilon_n \int d^4z\; \overline{\psi}_n(z)\,B(z)\,\psi_i(z) - i\,\epsilon_n \int d^4z\,d^4u\; \overline{\psi}_n(z)\,B(z)\,S_R(z,u;B)\,B(u)\,\psi_i(u)\Big) \tag{58}$$

Notar $\quad \overline{S_R}(x,y;B) = S_A(y,x;B)$

Utilizando

$$\sum_n \epsilon_n\,\psi_n(x)\,\overline{\psi}_n(y) = i\,S(x-y) \tag{59}$$

$$\sum_n S^*_{nf}\,\varepsilon_n\,S_{ni} = \varepsilon_f\;\delta_{fi} - i\int d^4x\,d^4y\;\bar{\psi}_f(x)\,B(x)\,S_R(x,y;B)\,B(y)\,\psi_i(y)$$

$$+\,i\int d^4x\,d^4y\;\bar{\psi}_f(x)\,B(x)\,S_A(x,y;B)\,B(y)\,\psi_i(y)$$

$$+\,i\int d^4x\,d^4y\;\bar{\psi}_f(x)\,B(x)\,S(x-y)\,B(y)\,\psi_i(y)$$

$$-\,i\int d^4x\,d^4y\,d^4z\;\bar{\psi}_f(x)\,B(x)\,S(x-z)\,B(z)\,S_R(z,y;B)\,B(y)\,\psi_i(y)$$

$$-\,i\int d^4x\,d^4y\,d^4z\;\bar{\psi}_f(x)\,B(x)\,S_A(x,z;B)\,B(z)\,S(z-y)\,B(y)\,\psi_i(y)$$

$$+\,i\int d^4x\,d^4y\,d^4z\,d^4u\;\bar{\psi}_f(x)\,B(x)\,S_A(x,z;B)\,B(z)\,S(z-u)\,B(u)\,S_R(u,y;B)\,B(y)\,\psi_i(y) \tag{60}$$

Teniendo en cuenta

$$S_R(x-y) - S_A(x-y) = S(x-y) \tag{61a}$$

$$S_R(x,y;B) = S_R(x-y) - \int d^4z\;S_R(x-z)\,B(z)\,S_R(z,y;B) \tag{61b}$$

$$S_A(x,y;B) = S_A(x-y) - \int d^4z\;S_A(y,z;B)\,B(z)\,S_A(z-y) \tag{61c}$$

se desarrolla el segundo término de (60)

$$- S_R(x,y;B) + S_A(x,y;B) + S(x-y) - \int d^4z\, S(x-z)\, B(z)\, S_R(z,y;B)$$

$$- \int d^4z\, S_A(x,z;B)\, B(z)\, S(z-y) + \int d^4z\, d^4u\, S_A(x,z;B)\, B(z)\, S(z-u)\, B(u)\, S_R(u,y;B)$$

$$= \int d^4z\, S_R(x-z)\, B(z)\, S_R(z,y;B) - \int d^4z\, S_A(x,z;B)\, B(z)\, S_A(z-y)$$

$$- \int d^4z\, S(x-z)\, B(z)\, S_R(z,y;B) - \int d^4z\, S_A(x,z;B)\, B(z)\, S(z-y) + \tag{62}$$

$$+ \int d^4z\, d^4u\, S_A(x,z;B)\, B(z)\, S(z-u)\, B(u)\, S_R(u,y;B) =$$

$$= \int d^4z\, S_A(x-z)\, B(z)\, S_R(z,y;B) - \int d^4z\, S_A(x,z;B)\, B(z)\, S_R(z-y) +$$

$$+ \int d^4z\, d^4u\, S_A(x,z;B)\, B(z) \big(S_R(z-u) - S_A(z-u) \big) B(u)\, S_R(u,y;B) = 0$$

Análogamente se demuestra

$$\sum_n S_{fn}\, \varepsilon_n\, S^*_{in} = \varepsilon_f\, \delta_{fi}$$

(57) se puede escribir definiendo [42]

$$\eta_{fi} = \varepsilon_i\, \delta_{fi} \tag{63}$$

de forma matricial

$$S^\dagger \eta\, S = S\, \eta\, S^\dagger = \eta \tag{64}$$

siendo S un operador unitario respecto a la métrica η . La unitariedad de S con métrica positiva ($\eta = \mathbb{1}$) implica

$$S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1} \tag{65}$$

lo cual solo es posible si

$$[S, \eta] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon_i - \varepsilon_f)\, S_{fi} = 0 \qquad \forall i,f \tag{66}$$

es decir, cuando no se producen transiciones entre estados de distinta norma

$$S_{fi} = 0 \qquad \text{si} \qquad \varepsilon_f \neq \varepsilon_i \tag{67}$$

Si S es un operador unitario se pueden construir relaciones de anticonmutación estables en el sentido de Wightmann, las cuales definen un espacio de Fock con métrica positiva. El procedimiento es análogo al desarrollado en §V.2

Sean $U_i(x)$ y $v_i(x)$ funciones tales que

$$\left.\begin{array}{l} u_i(x) \rightarrow \psi_i^{(+)}(x) \\ v_i(x) \rightarrow \psi_i^{(-)}(x) \end{array}\right. \qquad x_0 \rightarrow -\infty \tag{68}$$

El campo cuántico se define por

$$\psi(x) = \sum_i a_i^{in}\, u_i(x) + b_i^{in\dagger}\, v_i(x) \tag{69a}$$

$$\overline{\psi}(x) = \sum_i a_i^{in\dagger}\, \overline{u}_i(x) + b_i^{in}\, \overline{v}_i(x) \tag{69b}$$

verificándose

$$\{ a_i^{in}, a_f^{in\dagger} \} = \{ b_i^{in}, b_f^{in\dagger} \} = c_i\, \delta_{if} \tag{70}$$

siendo nulos el resto de las relaciones de anticonmutación.

De (69) y (70) resulta

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = \sum_i c_i \left(u_i(x)\, \bar{u}_i(x') + v_i(x)\, \bar{v}_i(x') \right) \tag{71}$$

Si la interación se desconecta en $x_0 \to -\infty$ (71) se reduce por (68) a

$$\{\psi^{in}(x), \bar{\psi}^{in}(x')\} = \sum_i c_i\, \psi_i(x)\, \bar{\psi}_i(x') \tag{72}$$

Para tiempos $x_0 \to +\infty$ (71) se calcula por medio de (52b)

$$\left.\begin{aligned} u_i(x) &\to \sum_f \psi_f(x)\, S_{fi} \\ v_i(x) &\to \sum_f \psi_f(x)\, S_{fi} \end{aligned}\right\} \quad \text{cuando } x_0 \to +\infty \tag{73}$$

obteniéndose

$$\{\psi^{out}(x), \bar{\psi}^{out}(x')\} = \sum_{i,f} \psi_f(x)\, \bar{\psi}_i(x') \sum_n S_{fn}\, c_n\, S^*_{in} \tag{74}$$

Las relaciones de anticonmutación de los campos in - out coinciden cuando

$$\sum_n S_{fn}\, c_n\, S^*_{in} = c_i\, \delta_{if} \tag{75}$$

Debido a (57) basta elegir $c_i = \varepsilon_i$ para que (75) se satisfaga, en cuyo caso el espacio de Fock de estados tiene métrica indefinida con las obvias dificultades de interpretación física. Por el contrario si $c_i = 1 \;\forall i$ se tiene un espacio de Fock con métrica positiva y relaciones de anticonmutación de salida distintas de las de entrada a menos que se satisfaga la condición (67). En conclusión: una teoría de campos fermiónicos es estable $\Longleftrightarrow$ S unitaria.

La cancelación de transiciones entre estados de distinta norma ($\varepsilon_f \neq \varepsilon_i$) impuesta por (67) ha de realizarse a todos los ordenes en teoría de perturbaciones. Por tanto:

$$\int d^4x \; \overline{\psi}_f(x) \; B(x) \; \psi_i(x) \; = 0 \quad , \quad \varepsilon_f \neq \varepsilon_i \tag{76a}$$

$$\int d^4x \, d^4y \; \overline{\psi}_f(x) \, B(x) \, S_R(x,y\,;B) \, B(y) \, \psi_i(y) = 0 \quad , \quad \varepsilon_f = \varepsilon_i \tag{76b}$$

V.4 MATRIZ S EN PRIMER ORDEN

La amplitud de transición en primer orden

$$S^{(1)}_{fi} = i \, \varepsilon_f \int d^4x \; \overline{\psi}_f(x) \, B(x) \, \psi_i(x) \tag{77}$$

En acoplo mínimo el elemento de matriz está dado por

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_f(x) \cdot B(x) \cdot \psi_i(x) \;=\;& e\,(\overline{\psi}_f \, \gamma^\mu \, \psi_i - \overline{\psi}^\mu_f \, \gamma \cdot \psi_i - \overline{\psi}_f \cdot \gamma \, \psi^\mu_i + \\ & + (a + \tfrac{1}{2}) \, \overline{\psi}_f \cdot \gamma \, \gamma^\mu \, \gamma \cdot \psi_i) \; A_\mu \end{aligned} \tag{78}$$

Escogiendo $\psi_i(x) = \psi^{3/2}_i(x)$, $\psi_f(x) = \psi^{3/2}_f(x)$

$$\overline{\psi}^{3/2}_f \cdot B \cdot \psi^{3/2}_i \;=\; e \, \overline{\psi}^{3/2}_\lambda \, \gamma^\mu \, \psi^{3/2\,\lambda} \; A_\mu \tag{79}$$

Las transiciones entre estados de spin 1/2 con función $\psi^l_i(x)$ $(l = \frac{1}{2}, 1, 2)$

$$\begin{aligned} \psi^l_\mu(x) &= N_l \, (i \partial_\mu - \tfrac{m}{2} \gamma_\mu) \, \phi_l(x) \\ (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_l) \, \phi_l(x) &= 0 \end{aligned} \tag{80}$$

siendo $\qquad N_{1/2} = \left(\dfrac{2}{3m^2} \right)^{1/2}$

$$N_1 = \left| \frac{2}{3m^2} \quad \frac{2m-m_2}{m_2-m_1} \right|^{1/2}$$

$$N_2 = \left| \frac{2}{3m^2} \quad \frac{2m-m_1}{m_1-m_2} \right|^{1/2} \qquad (81)$$

para que $\psi^{\ell}_{\mu}(x)$ esté normalizado respecto a la métrica A^{0}, puede escribirse en términos de los spinores $\phi_{\ell}(x)$

$$\bar{\psi}^{\ell} . B . \psi^{\ell'} = e N_{\ell} N_{\ell'} \Big\{ \frac{1}{2} \Box (\bar{\phi}_{\ell} \gamma^{\mu} \phi_{\ell'}) +$$

$$+ (m-m_{\ell}) \bar{\phi}_{\ell} \, i\overrightarrow{\partial}^{\mu} \phi_{\ell'} + (m-m_{\ell'}) \bar{\phi}_{\ell} (-i\overleftarrow{\partial}^{\mu}) \phi_{\ell'} +$$

$$+ \frac{m_{\ell}^2 + m_{\ell'}^2 + m_{\ell} m_{\ell'} - m^2 + 2a(2m-m_{\ell})(2m-m_{\ell'})}{2} \bar{\phi}_{\ell} \gamma^{\mu} \phi_{\ell'} \Big\} A_{\mu} \qquad (82)$$

El término en derivadas $\overrightarrow{\partial}^{\mu}$ y $\overleftarrow{\partial}^{\mu}$ se desarrolla utilizando la identidad de Gordon

$$\bar{\phi}_{\ell} \, i\overrightarrow{\partial}^{\mu} \phi_{\ell'} A_{\mu} = \frac{1}{2} \bar{\phi}_{\ell} \, i\overleftrightarrow{\partial}^{\mu} \phi_{\ell'} A_{\mu} + \frac{i}{2} \partial^{\mu} (\bar{\phi}_{\ell} \phi_{\ell'} A_{\mu}) - \frac{i}{2} \bar{\phi}_{\ell} \phi_{\ell'} \partial^{\mu} A_{\mu} \qquad (83a)$$

$$\bar{\phi}_{\ell} (-i\overleftarrow{\partial}^{\mu}) \phi_{\ell'} A_{\mu} = \frac{1}{2} \bar{\phi}_{\ell} \, i\overleftrightarrow{\partial}^{\mu} \phi_{\ell'} A_{\mu} - \frac{i}{2} \partial^{\mu} (\bar{\phi}_{\ell} \phi_{\ell'} A_{\mu}) + \frac{i}{2} \bar{\phi}_{\ell} \phi_{\ell'} \partial^{\mu} A_{\mu} \qquad (83b)$$

$$\bar{\phi}_{\ell} \, i\overleftrightarrow{\partial}^{\mu} \phi_{\ell'} = \frac{m_{\ell}+m_{\ell'}}{2} \bar{\phi}_{\ell} \gamma^{\mu} \phi_{\ell'} - \partial_{\lambda} (\bar{\phi}_{\ell} \sigma^{\mu\lambda} \phi_{\ell'}) \qquad (83c)$$

(82) resulta

$$\bar{\Psi}^{\ell}.\, B.\, \Psi^{\ell'} = e\, N_\ell N_{\ell'} \Big\{ \tfrac{1}{2} \Box (\bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'}) +$$

$$\frac{2m(m_\ell + m_{\ell'}) - m^2 - m_\ell m_{\ell'} + 2a(2m-m_\ell)(2m-m_{\ell'})}{2}\; \bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'} -$$

$$- \frac{2m-m_\ell-m_{\ell'}}{2}\, \partial_\lambda (\bar{\Phi}_\ell \sigma^{\mu\lambda} \phi_{\ell'}) \Big\} A_\mu + \tfrac{i}{2} e\, N_\ell N_{\ell'} (m_{\ell'} - m_\ell)\, \partial^\lambda (\bar{\Phi}_\ell \phi_{\ell'} A_\lambda) \quad \mathbf{(84)}$$

escogiendo el gauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, y empleando

$$\Box (\bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'}) A_\mu = \partial_\lambda \big(\partial^\lambda (\bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'}) A_\mu - \bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'} \partial^\lambda A_\mu \big) + \bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'} \Box A_\mu \quad \mathbf{(85a)}$$

$$\partial_\lambda (\bar{\Phi}_\ell \sigma^{\mu\lambda} \phi_{\ell'}) A_\mu = \partial_\lambda (\bar{\Phi}_\ell \sigma^{\mu\lambda} \phi_{\ell'} A_\mu) + \tfrac{1}{2} \bar{\Phi}_\ell \sigma^{\mu\lambda} \phi_{\ell'} F_{\mu\lambda} \quad \mathbf{(85b)}$$

se obtiene finalmente

$$\bar{\Psi}^{\ell}.\, B.\, \Psi^{\ell'} = e\, N_\ell N_{\ell'} \Big\{ \tfrac{1}{2} \bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'} J_\mu^{ext} +$$

$$\frac{2m(m_\ell + m_{\ell'}) - m^2 - m_\ell m_{\ell'} + 2a(2m-m_\ell)(2m-m_{\ell'})}{2}\; \bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'} A_\mu$$

$$- \frac{2m-m_\ell-m_{\ell'}}{4}\, \bar{\Phi}_\ell \sigma^{\mu\lambda} \phi_{\ell'} F_{\mu\lambda} \Big\} + \partial_\lambda V^\lambda_{\ell\ell'} \quad \mathbf{(86a)}$$

$$V^\lambda_{\ell\ell'} = \frac{e}{2} N_\ell N_{\ell'} \Big\{ \partial^\lambda (\bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'}) A_\mu - \bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'} \partial^\lambda A_\mu -$$

$$- (2m-m_\ell-m_{\ell'})\, \bar{\Phi}_\ell \sigma^{\mu\lambda} \phi_{\ell'} A_\mu + (m_{\ell'}-m_\ell)\, \bar{\Phi}_\ell \phi_{\ell'} A^\lambda \Big\} \quad \mathbf{(86b)}$$

siendo $J_\mu^{ext} = \Box A_\mu$ la fuente del campo electromagnético externo.

En RS* (86a) l = 1/2, a = 1/2 y por tanto

$$\bar{\Psi}^{1/2} . B . \Psi^{1/2} = e\, \bar{\phi}_{1/2} \gamma^\mu \phi_{1/2} A_\mu + \frac{e}{3m^2} \bar{\phi}_{1/2} \gamma^\mu \phi_{1/2} J_\mu^{ext} -$$

$$- \frac{e(m-m_{1/2})}{3m^2} \bar{\phi}_{1/2} \sigma^{\mu\lambda} \phi_{1/2} F_{\mu\lambda} + \partial_\lambda V^\lambda_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \tag{87}$$

expresión válida haciendo las sustituciones $\phi_{1/2} \to \phi_i$, $\bar{\phi}_{1/2} \to \bar{\phi}_f$

$V^\lambda_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ no contribuye a $S^{(1)}_{fi}$ para campos externos que se anulan suficientemente rápido en el infinito. Las transiciones 1/2 ⟶ 1/2 en primer orden están dadas por

$$S^{(1)}_{fi} = -i \int d^4x \left(e\, \bar{\phi}_f \gamma^\mu \phi_i A_\mu + \frac{e}{3m^2} \bar{\phi}_f \gamma^\mu \phi_i J_\mu^{ext} - \frac{e(m-m_{1/2})}{3m^2} \bar{\phi}_f \sigma^{\mu\nu} \phi_i F_{\mu\nu} \right) \tag{88}$$

Obsérvese que a los términos de acoplo mínimo y de Pauli se añade una interacción corriente-corriente y que el momento magnético anómalo coincide con el obtenido en (III.75) para el campo ϕ

En RS** si l = l' con a = $\frac{1}{2} - \frac{3m^2}{2(2m-m_1)(2m-m_2)}$ resulta

$$\bar{\Psi}^\ell . B . \Psi^\ell = -e\, \varepsilon_\ell\, \bar{\phi}_\ell \gamma^\mu \phi_\ell A_\mu + \frac{1}{2} e\, N_\ell^2\, \bar{\phi}_\ell \gamma^\mu \phi_\ell J_\mu^{ext} -$$

$$- \frac{e}{2} N_\ell^2 (m-m_\ell) \bar{\phi}_\ell \sigma^{\mu\lambda} \phi_\ell F_{\mu\lambda} + \partial_\lambda V^\lambda_{\ell\ell} \tag{89}$$

Si l ≠ l'

$$\bar{\Psi}^\ell . B . \Psi^{\ell'} = \frac{e}{2} N_\ell N_{\ell'} \bar{\phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'} J_\mu^{ext}$$

$$- \frac{e}{4} N_\ell N_{\ell'} (2m-m_\ell-m_{\ell'}) \bar{\phi}_\ell \sigma^{\mu\lambda} \phi_{\ell'} F_{\mu\lambda} + \partial_\lambda V^\lambda_{\ell\ell'} \tag{90}$$

La amplitud de transición $l_i \to l_f$ es pues:

$$S^{(1)}_{fi} = i\,\varepsilon_f \int d^4x \Big(-\varepsilon_f\, \delta_{l_f l_i}\, \bar{\Phi}_f \gamma^\mu \phi_i A_\mu +$$

$$+ \frac{e}{2} N_{l_f} N_{l_i} \bar{\Phi}_f \gamma^\mu \phi_i J^{ext}_\mu - \frac{e}{4} N_{l_f} N_{l_i} (2m - m_f - m_i) \bar{\Phi}_f \sigma^{\mu\lambda} \phi_i F_{\mu\lambda} \Big) \qquad (91)$$

Las transiciones $\frac{3}{2} \longleftrightarrow l$ (l = 1/2, 1, 2) se obtienen de

$$\bar{\Psi}^{3/2} . B . \Psi^l = e\, N_l \big(-i\, \bar{\Psi}^{3/2}_\lambda F^{\lambda\mu} \gamma_\mu \phi_l +$$

$$+ i\,\partial_\lambda \big(\bar{\Psi}^\lambda_{3/2} \gamma^\mu \phi_l A_\mu - \bar{\Psi}^\mu_{3/2} \gamma^\lambda \phi_l A_\mu \big) \big) \qquad (92a)$$

$$\bar{\Psi}^l . B . \Psi^{3/2} = e\, N_l \big(-i\, \bar{\Phi}_l \gamma_\mu F^{\mu\lambda} \Psi^{3/2}_\lambda -$$

$$- i\,\partial_\lambda \big(\bar{\Phi}_l \gamma^\mu \Psi^\lambda_{3/2} A_\mu - \bar{\Phi}_l \gamma^\lambda \Psi^\mu_{3/2} A_\mu \big) \big) \qquad (92b)$$

por tanto

$$S^{(1)}_{fi} = i\,\varepsilon_f \int d^4x \big(-ie N_{l_i} \bar{\Psi}^{3/2}_f . F . \gamma\, \phi_i - ie N_{l_f} \bar{\Phi}_f \gamma . F . \Psi^{3/2}_i \big) \qquad (93)$$

(91) y (93) $\Longrightarrow$ $S^{(1)}_{fi} \neq 0$ ($\varepsilon_f \neq \varepsilon_i$) y por tanto la teoría es inestable en primer orden. Sin embargo si $\varepsilon_f \neq \varepsilon_i$ no aparece explícitamente el potencial vector A_μ lo que permite añadir contratérminos invariante gauge que cancelen estas transiciones.

La descomposición del campo libre

$$\Psi_\mu = \sum_l \Psi^l_\mu = \Psi^{3/2}_\mu + \Psi^{1/2}_\mu \quad (RS^*)$$

$$= \Psi^{3/2}_\mu + \Psi^1_\mu + \Psi^2_\mu \quad (RS^{**}) \qquad (94)$$

permite escribir el agrangiano de interacción

$$\mathcal{L}^{(0)}_{min} = \overline{\Psi}.B.\psi = e\,\overline{\psi}^{3/2}\gamma^{\mu}\psi^{3/2}A_{\mu} + \sum_{l,l'}\Big(-e\,\varepsilon_l\,\delta_{ll'}\,\overline{\phi}_l\gamma^{\mu}\phi_{l'}A_{\mu} + + \frac{e}{2}N_l N_{l'}\overline{\phi}_l\gamma\phi_{l'}J^{ext}_{\mu} - \frac{e}{4}N_l N_{l'}(2m-m_l-m_{l'})\,\overline{\phi}_l\,\sigma.F\,\phi_{l'}\Big) + + \sum_l -ie\,N_l\,(\overline{\psi}^{3/2}F.\gamma\phi_l + \overline{\phi}_l\gamma.F.\psi^{3/2}) + \partial_\lambda V^{\lambda}_{min} \tag{95a}$$

$$V^{\lambda}_{min} = \sum_{l,l'} \gamma^{\lambda}_{ll'} + \sum_l ie\,N_l\,(\overline{\psi}^{\lambda}_{3/2}\gamma^{\mu}\phi_l A_{\mu} - \overline{\psi}^{\mu}_{3/2}\gamma^{\lambda}\phi_l A_{\mu} - - \overline{\phi}_l\gamma^{\mu}\psi^{\lambda}_{3/2}A_{\mu} + \overline{\phi}_l\gamma^{\lambda}\psi^{\mu}_{3/2}A_{\mu}) \tag{95b}$$

Se estudia a cotinuación el método que posibilita desacoplar los campos de norma positiva (físicos) y los campos de norma negativa (ghost) en $\mathcal{L}^{(0)}_{I}$

1) En RS^* (95) es

$$\mathcal{L}^{(0)}_{min\,RS^*} = e\,\overline{\psi}_{3/2}\gamma^{\mu}\psi_{3/2}A_{\mu} + e\,\overline{\phi}_{1/2}\gamma^{\mu}\phi_{1/2}A_{\mu} + \frac{e}{3m^2}\overline{\phi}_{1/2}\gamma^{\mu}\phi_{1/2}J^{ext}_{\mu} - - \frac{e}{3m^2}(m-m_{1/2})\,\overline{\phi}_{1/2}\,\sigma F\,\phi_{1/2} - ie\sqrt{\frac{2}{3m^2}}\,(\overline{\psi}_{3/2}.F.\gamma\phi_{1/2} + \overline{\phi}_{1/2}\gamma.F.\psi_{3/2}) + \partial_\lambda V^{\lambda}_{min\,RS^*} \tag{96}$$

Los contratérminos necesarios para cancelar las transiciones $\frac{3}{2}\leftrightarrow\frac{1}{2}$ en primer orden se obtieen de una densidad Lagrangiana de interacción:

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_{min} + \mathcal{L}_{Pauli} \tag{97}$$

$$\mathcal{L}_{Pauli} = ig_2\,\overline{\Psi}.F.\Psi + g_3\,\overline{\Psi}.\gamma\,\sigma.F\,\gamma.\Psi + g_4\,\overline{\Psi}\,\sigma.F\,\Psi + + ig_1\,\overline{\Psi}.\gamma\,\gamma.F.\Psi + ig_1\,\overline{\Psi}.F.\gamma\,\gamma.\Psi \tag{98}$$

donde las constantes de acoplo g_l se eligen de manera que $S^{(1)}_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}} = 0$
Dado que:

$$\bar{\psi}_{3/2} \, . \, F \, . \, \psi_{1/2} = \frac{1}{2} N_{1/2} \, \bar{\psi}^{3/2}_{\mu} \, \sigma_{\lambda\nu} F^{\mu\lambda,\nu} \phi_{1/2} + \frac{m_{1/2}}{2} N_{1/2} \, \bar{\psi}^{3/2}_{\mu} \, F^{\mu\lambda} \gamma_{\lambda} \phi_{1/2} + \partial_{\lambda}(\text{---}) \tag{99a}$$

$$\bar{\psi}_{3/2} \, \sigma . F \, \psi_{1/2} = -i N_{1/2} \, \bar{\psi}^{3/2}_{\lambda} \, \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}{}^{,\lambda} \phi_{1/2} - \frac{m N_{1/2}}{2} \bar{\psi}^{3/2}_{\lambda} \sigma . F \gamma^{\lambda} \phi_{1/2} + \partial_{\lambda}(\text{--}) \tag{99b}$$

se tiene $g_2 = g_4 = 0$

$$\bar{\psi} . \gamma \, \gamma . F . \psi + \bar{\psi} . F . \gamma \, \gamma . \psi = \sqrt{\frac{2}{3m^2}} (m_{1/2} - 2m) \left(\bar{\phi}_{1/2} \gamma . F . \psi_{3/2} + \bar{\psi}_{3/2} . F . \gamma \, \phi_{1/2} \right) +$$

$$+ \frac{2i}{3m^2} (m_{1/2} - 2m) \, \bar{\phi}_{1/2} \gamma^{\mu} \phi_{1/2} \, J^{ext}_{\mu} + \frac{2i}{3m} (m_{1/2} - 2m) \, \bar{\phi}_{1/2} \, \sigma . F \, \phi_{1/2} +$$

$$+ \frac{2}{3m^2} (m_{1/2} - 2m) \, \partial_{\lambda} \left(i \, \bar{\phi}_{1/2} \gamma_{\mu} \phi_{1/2} F^{\mu\lambda} - \bar{\phi}_{1/2} \tilde{F}^{\lambda\nu} \gamma^5 \gamma_{\nu} \phi_{1/2} \right) \tag{100}$$

habiendo utilizado

$$\bar{\phi}_{\ell} \left(\gamma_{\mu} \, i \overleftrightarrow{\partial}_{\lambda} - \gamma_{\lambda} \, i \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \right) \phi_{\ell'} = \partial^{\nu} \left(\bar{\phi}_{\ell} \, \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \gamma^5 \gamma^{\rho} \phi_{\ell'} \right) + i (m_{\ell} - m_{\ell'}) \, \bar{\phi}_{\ell} \, \sigma_{\mu\lambda} \phi_{\ell'} \tag{101a}$$

$$\partial_{\lambda} \tilde{F}^{\lambda\nu} = 0 \tag{101b}$$

$\mathcal{L}^{(0)}_{I,RS^*}$ para campos libres se escribe:

$$\mathcal{L}^{(0)}_{I,RS^*} = e \, \bar{\psi}_{3/2} \gamma^{\mu} \psi_{3/2} A_{\mu} + e \, \bar{\phi}_{1/2} \gamma^{\mu} \phi_{1/2} A_{\mu} + \left(\frac{e}{3m^2} - \frac{2(m_{1/2} - 2m)}{3m^2} g_1 \right) \bar{\phi}_{1/2} \gamma^{\mu} \phi_{1/2} \, J^{ext}_{\mu} +$$

$$+ \frac{1}{3m^2} \left(- e(m - m_{1/2}) - 2m(m_{1/2} - 2m) \, g_1 + 2(m_{1/2} - 2m)^2 g_3 \right) \bar{\phi}_{1/2} \, \sigma . F \, \phi_{1/2} -$$

$$- ie \sqrt{\frac{2}{3m^2}} \left(e - g_1 (m_{1/2} - 2m) \right) \left(\bar{\psi}_{3/2} . F . \gamma \, \phi_{1/2} + \bar{\phi}_{1/2} \gamma . F . \psi_{3/2} \right) + \partial_{\mu} V^{\mu}_{RS^*} \tag{102}$$

$$S^{(1)}_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}} = S^{(1)}_{\frac{1}{2}\frac{3}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_1 = \frac{e}{m_{1/2} - 2m}$$

resultando

$$\mathcal{L}^{(0)}_{1,RS^*} = e\, \bar{\Psi}_{3/2} \gamma^\mu \Psi_{3/2} A_\mu + e\, \bar{\Phi}_{1/2} \gamma^\mu \Phi_{1/2} A_\mu - \frac{e}{3m^2} \bar{\Phi}_{1/2} \gamma^\mu \Phi_{1/2} J^{ext}_\mu$$

$$+ \frac{1}{3m^2} \left(e(m_{1/2} - 3m) + 2(m_{1/2} - 2m)^2 g_3 \right) \bar{\Phi}_{1/2}\, \sigma.F\, \Phi_{1/2} + \partial_\lambda V^\lambda_{RS^*} \tag{103}$$

$$V_{RS^*} = \frac{e}{3m^2} \left\{ \partial^\lambda (\bar{\Phi}_{1/2} \gamma^\mu \Phi_{1/2}) A_\mu - \bar{\Phi}_{1/2} \gamma^\mu \Phi_{1/2} \partial^\lambda A_\mu - 2(m - m_{1/2}) \bar{\Phi}_{1/2} \sigma^{\mu\lambda} \Phi_{1/2} A_\mu \right\}$$

$$+ ie\sqrt{\frac{2}{3m^2}} \left\{ \bar{\Psi}^\lambda_{3/2} \gamma^\mu \Phi_{1/2} A_\mu - \bar{\Psi}^\mu_{3/2} \gamma^\lambda \Phi_{1/2} A_\mu - \bar{\Phi}_{1/2} \gamma^\mu \Psi^\lambda_{3/2} A_\mu + \bar{\Phi}_{1/2} \gamma^\lambda \Psi^\mu_{3/2} A_\mu \right\}$$

$$- \frac{2e}{3m^2} \left\{ \bar{\Phi}_{1/2} \gamma_\mu \Phi_{1/2} F^{\mu\lambda} + i\, \bar{\Phi}_{1/2} \gamma^5 \gamma_\mu \Phi_{1/2} \tilde{F}^{\lambda\mu} \right\} \tag{104}$$

g_3 se determina exigiendo que la teoría sea causal. La densidad Lagrangiana (98) se transforma en la densidad

$$\mathcal{L}_{Pauli} = \bar{\Psi} . T . \Psi$$

$$T_{\mu\nu} = i q_2 F_{\mu\nu} + q_3 \gamma^5 \tilde{F}_{\mu\nu} + i q_1 F_{\mu\lambda} \sigma^\lambda{}_\nu - i q_1^* \sigma_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu + q_4 g_{\mu\nu}\, \sigma.F \tag{105}$$

con

$$\begin{aligned} q_1 &= -i(g_1 + 2g_3) \\ q_2 &= 2g_1 + g_2 + 2g_3 \\ q_3 &= 2g_3 \\ q_4 &= g_3 + g_4 \end{aligned} \tag{106}$$

siendo p,q los parámetros obtenidos en $D(n,F)_{RS^*}$

$$p = \frac{2(2m - m_{1/2})}{3m^2}\left(g_1 + \frac{3}{2} g_3\right)$$

$$q = \frac{2(2m - m_{1/2})}{3m^2}\left(g_1 + 2 g_3\right) \qquad (107)$$

$D(n,F)_{RS^*}$ es causal si $p = 0 \Longrightarrow g_3 = - g_1 = \dfrac{e}{2m - m_{1/2}}$, por tanto

$$D(n,F)_{RS^*} = (n^2)^6 \left(r^2 - \left(\frac{4e}{9m^2}\, n.F\right)^2\right)^2 \qquad (108)$$

2) En RS^{**} el procedimiento es análogo al utilizado en RS^* a diferencia de que el término adicional añadido al Lagrangiano ha de cancelar las transiciones $\psi^{3/2} \leftrightarrow \phi_2$ y $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ donde ϕ_2 es el campo ghost ($\varepsilon_{3/2} = \varepsilon_1 = - \varepsilon_2 = 1$)

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_{min} + \mathcal{L}_{Pauli} + \mathcal{L}_{corriente} \qquad (109)$$

$$\mathcal{L}_{Pauli} = i g_1 \bar{\Psi}.\gamma\, \gamma.F.\psi + i g_1 \bar{\Psi}.F.\gamma\, \gamma.\psi + g_3 \bar{\Psi}.\gamma\, \sigma.F\gamma.\psi \qquad (110a)$$

$$\mathcal{L}_{corriente} = g_5\, \bar{\Psi}.\gamma\, \gamma^{\mu} \gamma.\psi\, J_{\mu}^{ext} \qquad (110b)$$

La expresión correspondiente a (100) es:

$$\bar{\Psi}.\gamma\,\gamma.F.\psi + \bar{\Psi}.F.\gamma\,\gamma.\psi = \sum_{\ell} N_\ell (m_\ell - 2m) \left(\bar{\Phi}_\ell \gamma.F.\psi_{3/2} + \bar{\Psi}_{3/2}.F.\gamma\,\phi_\ell \right)$$

$$+ \sum_{\ell,\ell'} \frac{i}{2} N_\ell N_{\ell'} (m_\ell - 2m) \Big\{ \bar{\Phi}_\ell \gamma_\mu \phi_{\ell'} J^\mu_{ext} + \bar{\Phi}_{\ell'} \gamma_\mu \phi_\ell J^\mu_{ext} +$$

$$+ \frac{2m + m_\ell - m_{\ell'}}{2} \left(\bar{\Phi}_\ell\, \sigma.F\, \phi_{\ell'} + \bar{\Phi}_{\ell'}\, \sigma.F\, \phi_\ell \right) +$$

$$+ \partial_\lambda \left(\bar{\Phi}_\ell \gamma_\mu \phi_{\ell'} F^{\mu\lambda} + \bar{\Phi}_{\ell'} \gamma_\mu \phi_\ell F^{\mu\lambda} + i \bar{\Phi}_\ell \gamma^5 \gamma_\nu \phi_{\ell'} \tilde{F}^{\lambda\nu} + i \bar{\Phi}_{\ell'} \gamma^5 \gamma_\nu \phi_\ell \tilde{F}^{\lambda\nu} \right) \Big\} \tag{111}$$

además

$$\bar{\Psi}.\gamma\,\sigma.F\,\gamma.\psi = \sum_{\ell,\ell'} N_\ell N_{\ell'} (m_\ell - 2m)(m_{\ell'} - 2m)\, \bar{\Phi}_\ell\, \sigma.F\, \phi_{\ell'} \tag{112}$$

$$\bar{\Psi}.\gamma\,\gamma^\mu\,\gamma.\psi\, J^{ext}_\mu = \sum_{\ell,\ell'} N_\ell N_{\ell'} (m_\ell - 2m)(m_{\ell'} - 2m)\, \bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'} J^{ext}_\mu \tag{113}$$

(109) utilizando (95), (111), (112) y (113) resulta:

$$\mathcal{L}^{(0)}_{I,RS**} = e\, \bar{\Psi}_{3/2} \gamma^\mu \psi_{3/2} A_\mu + \sum_{\ell} - e\, \varepsilon_\ell \bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_\ell A_\mu +$$

$$+ \sum_{\ell,\ell'} \left(L_{\ell\ell'} \bar{\Phi}_\ell \gamma^\mu \phi_{\ell'} J^{ext}_\mu + M_{\ell\ell'} \bar{\Phi}_\ell\, \sigma.F\, \phi_{\ell'} \right) +$$

$$+ \sum_{\ell} -i N_\ell \left(e - g_1 (m_\ell - 2m) \right) \left(\bar{\Psi}_{3/2}.F.\gamma\,\phi_\ell + \bar{\Phi}_\ell \gamma.F.\psi_{3/2} \right) + \partial_\lambda V^\lambda_{RS**} \tag{114}$$

donde

$$L_{\ell\ell'} = N_\ell N_{\ell'} \left\{ \frac{e}{2} - \frac{g_1}{2} (m_\ell + m_{\ell'} - 4m) + g_5 (m_\ell - 2m)(m_{\ell'} - 2m) \right\}$$

$$M_{11'} = N_\ell N_{\ell'} \left\{ -\frac{e}{4}(2m - m_\ell - m_{\ell'}) - \frac{g_1}{4}\left(2m(m_\ell + m_{\ell'} - 4m) + (m_\ell - m_{\ell'})^2\right) \right.$$

$$\left. + \; g_3 (m_\ell - 2m)(m_{\ell'} - 2m) \right\}$$

Por tanto $S^{(1)}_{\frac{3}{2},2} = S^{(1)}_{2,\frac{3}{2}} = S^{(1)}_{1,2} = S^{(1)}_{2,1} = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{e}{m_2 - 2m} \\ L_{12} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad g_5 = \frac{e}{2(m_2-2m)^2} \\ M_{12} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad g_3 = \frac{e(m_1 - 3m_2 + 6m)}{4(m_2-2m)^2} \end{aligned} \tag{115}$$

cumpliéndose

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{e}{3m^2} \; \frac{m_1 - m_2}{} \\ L_{22} &= 0 \\ M_{11} &= \frac{e}{6m^2} \; \frac{m_1^2 - 2m_1m_2 + 2m_1m + 2m_2m - 4m^2}{m_2 - 2m} \\ M_{22} &= \frac{e}{6m^2}(m_1 - 2m) \end{aligned} \tag{116}$$

la cuadridivergencia en (114) está dada por

$$\begin{aligned} V^\lambda_{RS**} &= V^\lambda_{min} + \\ &+ \sum_{\ell,\ell'} \frac{g_1}{2} N_\ell N_{\ell'} (4m - m_\ell - m_{\ell'}) \left(\bar{\Phi}_\ell \gamma_\mu \phi_{\ell'} F^{\mu\lambda} + i\, \bar{\Phi}_\ell \gamma^5 \gamma_\nu \phi_{\ell'} \tilde{F}^{\lambda\nu} \right) \end{aligned} \tag{117}$$

V.5 MATRIZ S EN SEGUNDO ORDEN

En el apartado anterior se ha hallado el potencial B(x) que conduce a una teoría invariante gauge, causal y en la que los campos físicos ϕ_{ph} y los ghost ϕ_{gh} están desacoplados en primer orden; con otras palabras, el Lagrangiano de interacción para los campos libres puede escribirse

$$\mathcal{L}_I^{(0)}(\psi) = \mathcal{L}_I^{(0)'}(\phi_{ph}) + \mathcal{L}_I^{(0)''}(\phi_{gh}) + \partial_\mu V^\mu(\phi_{ph}, \phi_{gh}) \qquad (118)$$

Si $V^0 = 0$ o bien no aparecieran en él términos cruzados $\phi_{ph} \leftrightarrow \phi_{gh}$ se podría asegurar que ambos campos se desacoplan a todos los órdenes obteniéndose una matriz S factorizable $S = S_{ph} \cdot S_{gh}$, y por tanto una teoría unitaria en el sector ϕ_{ph}. Otro camino que conduciría al mismo resultado consistiría en desarrollar la matriz S utilizando el operador T^* covariante [41, 43]

$$S = T^* \exp\left(i \int d^4x \; \mathcal{L}_I^{(0)}(\psi)\right) \qquad (119)$$

. Aplicando el teorema de Wick con T^* en vez de T y tomando las contracciones de los campos $\psi(x)$ iguales a las funciones de Green

$$\langle T^*(\psi(x)\overline{\psi}(y))\rangle_0 = i\, S_F(x,y) \qquad (120)$$

Si se admite que la expresión (119) es aplicable cuando $\mathcal{L}_I^{(0)}$ se descompone según (118), y definiendo adecuadamente las contracciones $\langle T^*(\phi_i(x)\overline{\phi}_j(y))\rangle_0$ tal que T^* conmute con las derivadas de los campos [43].

$$\langle T^*(\partial_\mu^x \phi_i(x)\, \partial_\nu^y \overline{\phi}_j(y))\rangle_0 = \partial_\mu^x\, \partial_\nu^y \langle T^*(\phi_i(x)\overline{\phi}_j(y))\rangle \qquad (121)$$

obtendríamos finalmente

$$S = T^* \exp\left(i \int d^4x\, \mathcal{L}_I^{(0)'}(\phi_{ph})\right) T^* \exp\left(i \int d^4x\, \mathcal{L}_I^{(0)''}(\phi_{gh})\right) \qquad (122)$$

El cálculo del elemento de matriz $S^{(2)}_{fi}$ en segundo orden

$$S^{(2)}_{fi} = -i\, \epsilon_f \int d^4x\, d^4y\; \bar{\psi}_f(x)\, B(x)\, S_R(x-y)\, B(y)\, \psi_i(y) \tag{123}$$

es conveniente realizarlo en el espacio de momentos, utilizando ondas planas para los estados asintóticos

$$\psi_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_i}{E_i}}\; e^{-i\,p\cdot x}\; u_i(p,\lambda)$$

$$\psi_f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_f}{E_f}}\; e^{-i\,p'\cdot x}\; u_f(p',\lambda') \tag{124}$$

particularizadas para soluciones de frecuencia positiva.

Como quiera que

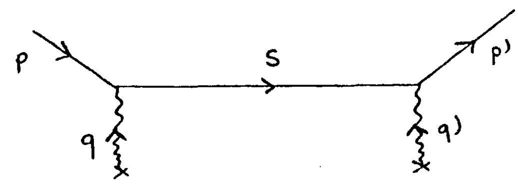
$$B(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^2}\; e^{-i\,q\cdot x}\; \hat{B}(q) \tag{125a}$$

$$S_R(x-y) = \int_{C_R} \frac{d^4s}{(2\pi)^4} \sum_\ell \frac{d^\ell(s)}{p^2 - m^2_\ell}\; e^{-i\,s\cdot(x-y)} \tag{125b}$$

se tiene

$$S^{(2)}_{fi} = -i\, \epsilon_f \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m_f\, m_i}{E_f\, E_i}} \int_{C_R} d^4s \sum_\ell \bar{u}_f\, \hat{B}(p'-s)\, \frac{d^\ell(s)}{s^2 - m^2_\ell}\, \hat{B}(s-p)\, u_i \tag{126}$$

cuya representación es



verificándose la conservación de la energía en cada vértice

$$p + q = s = p' - q' \tag{127}$$

A continuación calculamos los elementos de matriz

$$T_{fi} = \sum_{\ell} T^{\ell}_{fi} = \sum_{\ell} \bar{u}_f \, \hat{B}(p'-s) \, \frac{d^{\ell}(s)}{s^2 - m^2_{\ell}} \, \hat{B}(s-p) \, u_i \tag{128}$$

en términos de los "campos componentes" ϕ's y sus funciones de Green en las teorías RS^* y RS^{**} para distintos procesos.
Nota: $d^{\ell}_{\mu\nu}(s)$ vienen dadas en (V.29).

a) Transición $3/2 \longrightarrow 3/2$ en RS^* con acoplo mínimo

$$B_{\mu\nu}(q) = g_{\mu\nu} \not{A}(q) - A_{\mu}(q)\gamma_{\nu} - \gamma_{\mu} A_{\nu}(q) + \gamma_{\mu} \not{A}(q) \gamma_{\nu} \tag{129}$$

$e = 1$ y $\hat{B}(q) \equiv B(q)$

$$T^{3/2}_{fi} = \bar{u}^{3/2}_{\mu} \left(g^{\mu\nu} \not{A}' - A'^{\mu} \gamma^{\nu} \right) \frac{d^{3/2}_{\nu\lambda}}{s^2 - m^2} \left(g^{\lambda\rho} \not{A} - \gamma^{\lambda} A^{\rho} \right) u^{3/2}_{\rho} \tag{130}$$

$$T^{1/2}_{fi} = -\frac{2}{3m^2} \bar{u}^{3/2}_{\mu} \left(g^{\mu\nu} \not{A}' - A'^{\mu} \gamma^{\nu} \right) \left(s_{\nu} - \tfrac{m}{2} \gamma_{\nu} \right) \frac{1}{\not{s} - m_{1/2}} \left(s_{\lambda} - \tfrac{m}{2} \gamma_{\lambda} \right) \left(g^{\lambda\rho} \not{A} - \gamma^{\lambda} A^{\rho} \right) u^{3/2}_{\rho}$$

$$= -\frac{2}{3m^2} \bar{u}^{3/2}_{\mu} \left(\not{q}' A'^{\mu} - q'^{\mu} \not{A}' \right) \frac{1}{\not{s} - m_{1/2}} \left(q^{\nu} \not{A} - \not{q} A^{\nu} \right) u^{3/2}_{\nu} \tag{131}$$

Notar

$$F_{\mu\nu} = i \left(A_{\mu} q_{\nu} - q_{\mu} A_{\nu} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma . F_{\nu} = i \left(q_{\nu} \not{A} - \not{q} A_{\nu} \right) \\ F_{\mu} . \gamma = i \left(\not{q} A^{\mu} - q^{\mu} \not{A} \right) \end{array} \tag{132}$$

con lo cual $T_{fi} = T^{3/2}_{fi} + T^{1/2}_{fi}$ se deduce de $_{RS^*, min}$ escribiendo

$\bar{\Psi}_{3/2\,\mu}\ B^{\mu\lambda}_{min}\ \psi_{3/2\,\lambda}$ en vez de $e\,\bar{\psi}^{3/2}_{\lambda}\,\gamma^{\mu}\,\psi^{3/2\,\lambda}\,A_{\mu}$ por aplicación formal del teorema de Wick a los campos $\psi_{3/2}$ y $\phi_{1/2}$

b) Transición 3/2 $\longrightarrow$ 3/2 en RS** con acoplo mínimo

$$B_{\mu\nu}(q) = g_{\mu\nu}\,\not{A}(q) - A_{\mu}(q)\gamma_{\nu} - \gamma_{\mu}\,A_{\nu}(q) + \left(\tfrac{1}{2}+a\right)\gamma_{\mu}\,\not{A}(q)\,\gamma_{\nu} \tag{133}$$

$$T_{fi} = T^{3/2}_{fi} + T^{1}_{fi} + T^{2}_{fi}$$

$T^{3/2}_{fi}$ igual a (130) y

$$T^{\ell}_{fi} = c_{\ell}\ \bar{u}^{3/2}_{\mu}\,(\not{q}'A'^{\mu} - q'^{\mu}\not{A}')\,\frac{1}{\not{s}-m_{\ell}}\,(q^{\nu}\not{A} - \not{q}\,A^{\nu})\,u^{3/2}_{\nu} \tag{134}$$

c) Transición 3/2 $\longrightarrow$ 3/2 en RS* y RS** con acoplo mínimo + Pauli

$$B_{\mu\nu}(q) = B^{min}_{\mu\nu}(q) + 2g_{3}\,\gamma_{\mu}\,\not{q}\,\not{A}\,\gamma_{\nu} - g_{5}\,q^{2}\,\gamma_{\mu}\,\not{A}\,\gamma_{\nu}$$
$$+\ g_{1}\,\gamma_{\mu}\,(\not{q}\,A_{\nu} - \not{A}\,q_{\nu}) + g_{1}\,(q_{\mu}\not{A} - A_{\mu}\not{q})\,\gamma_{\nu}$$

Notar
$$\sigma.F = 2\,\not{q}\,\not{A} \qquad (q^{\mu}A_{\mu}(q) = 0)$$
$$J^{\mu}_{ext} = -\,q^{2}\,A^{\mu} \tag{135}$$

$$T^{3/2}_{fi} = \left(T^{3/2}_{fi}\right)_{min} + \frac{2}{3m^{2}}\,g_{1}\,\bar{u}^{3/2}_{\mu}\,(\not{q}'A'^{\mu} - q'^{\mu}\not{A}')\left(-2+g_{1}(\not{s}-2m)\right)(q^{\nu}\not{A} - \not{q}\,A^{\nu})\,u^{3/2}_{\nu} \tag{136}$$

$$-T^{\ell}_{fi} = \left(T^{\ell}_{fi}\right)_{min} + c_\ell g_1 \bar{u}^{3/2}_{\mu} (q'^{\mu} A\!\!\!/' - A'^{\mu} q\!\!\!/') \Big\{ 2 - g_1 (\not{s} - 2m) +$$

$$+ \frac{2(m_\ell - 2m) - g_1 (m_\ell - 2m)^2}{\not{s} - m_\ell} - g_1 (m_\ell - 2m) \Big\} (q^{\nu} A\!\!\!/ - q\!\!\!/ A^{\nu}) u^{3/2}_{\nu} =$$

$$= c_\ell \bar{u}^{3/2}_{\mu} (q\!\!\!/' A'^{\mu} - q'^{\mu} A\!\!\!/') \Big\{ g_1 (-2 + g_1 (\not{s} - 2m)) +$$

$$+ \frac{(1 - g_1 (m_\ell - 2m))^2}{\not{s} - m_\ell} + g_1^2 (m_\ell - 2m) \Big\} (q^{\nu} A\!\!\!/ - q\!\!\!/ A^{\nu}) u^{3/2}_{\nu} \qquad (137)$$

Por tanto

$$\left(T_{fi}\right)_{RS^*} = \left(T^{3/2}_{fi}\right)_{min} - \frac{2}{3m^2} (1 - g_1 (m_{1/2} - 2m))^2 \bar{u}^{3/2}_{\mu} (q\!\!\!/' A^{\mu} - q'^{\mu} A\!\!\!/') \frac{1}{\not{s} - m_{1/2}} (q^{\nu} A\!\!\!/ - q\!\!\!/ A^{\nu}) u^{3/2}_{\nu}$$

$$- \frac{2}{3m^2} g_1^2 (m_{1/2} - 2m) \bar{u}^{3/2}_{\mu} (q\!\!\!/' A'^{\mu} - q'^{\mu} A\!\!\!/') (q^{\nu} A\!\!\!/ - q\!\!\!/ A^{\nu}) u^{3/2}_{\nu} \qquad (138)$$

Comparemos (138) con lo que se obtiene a partir de $\mathcal{L}^{(0)}_{RS^*,min+Pauli}$: Observamos la aparición de un término adicional de contacto, el cual no aparece al calcular $(T_{fi})_{RS^{**}}$

$$\left(T_{fi}\right)_{RS^{**}} = \left(T^{3/2}_{fi}\right)_{min} +$$

$$+ \sum_{\ell} c_\ell (1 - g_1 (m_\ell - 2m))^2 \bar{u}^{3/2}_{\mu} (q\!\!\!/' A'^{\mu} - q'^{\mu} A\!\!\!/') \frac{1}{\not{s} - m_\ell} (q^{\nu} A\!\!\!/ - q\!\!\!/ A^{\nu}) u^{3/2}_{\nu} \qquad (139)$$

Si $g_1 = \dfrac{1}{m_2 - 2m}$ se cancela la contribución del campo spinorial de masa m_2 en (139).

d) Transición 1/2 $\longrightarrow$ 3/2 en RS^* con acoplo mínimo

$$T^{\ell}_{fi} = N_{1/2} \bar{u}^{3/2}_{\mu} (g^{\mu\nu} A\!\!\!/' - A'^{\mu} \gamma^{\nu}) \frac{d^{\ell}_{\nu\lambda}(s)}{s^2 - m_\ell^2} (g^{\lambda\rho} A\!\!\!/ - \gamma^{\lambda} A^{\rho} - A^{\lambda} \gamma^{\rho} + \gamma^{\lambda} A\!\!\!/ \gamma^{\rho}) (P_{\rho} - \tfrac{m}{2} \gamma_{\rho}) u^{1/2} \qquad (140)$$

$$T^{3/2}_{fi} = N_{1/2}\,\bar u^{3/2}_\mu (g^{\mu\nu} \not A' - A'^\mu \gamma^\nu) \frac{d^{3/2}_{\nu\lambda}(s)}{s^2-m^2} (\not q A^\lambda - q^\lambda \not A)\, u^{1/2} +$$

$$+ \frac{2N_{1/2}}{3m^2}\,\bar u^{3/2}_\mu (\not q' A'^\mu - q'^\mu \not A')\not q \not A\, u^{1/2} + N_{1/2}\,\bar u^{3/2}_\mu (A^\mu \not A' - A'^\mu \not A)\, u^{1/2} \tag{141}$$

$$T^{1/2}_{fi} = -N_{1/2}\,\bar u^{3/2}_\mu (\not q' A'^\mu - q'^\mu \not A')\frac{1}{\not s - m_{1/2}}\left(\not A + \frac{2(m_{1/2}-m)}{3m^2}\not q\not A - \frac{1}{3m^2}q^2\not A\right)u^{1/2}$$

$$-\frac{1}{3m^2}N_{1/2}\,\bar u^{3/2}_\mu (\not q' A'^\mu - q'^\mu \not A')\not q\not A\, u^{1/2} \tag{142}$$

Resultando para T_{fi}

$$T_{fi} = N_{1/2}\,\bar u^{3/2}_\mu (g^{\mu\nu}\not A' - A'^\mu\gamma^\nu)\frac{d^{3/2}_{\nu\lambda}}{s^2-m^2}(\not q A^\lambda - q^\lambda\not A)\,u^{1/2}$$

$$-N_{1/2}\,\bar u^{3/2}_\mu (\not q' A'^\mu - q'^\mu\not A')\frac{1}{\not s - m_{1/2}}\left(\not A + \frac{2(m_{1/2}-m)}{3m^2}\not q\not A - \frac{1}{3m^2}q^2\not A\right)u^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{3m^2}N_{1/2}\,\bar u^{3/2}_\mu (\not q' A'^\mu - q'^\mu\not A')\not q\not A\, u^{1/2} + N_{1/2}\,\bar u^{3/2}_\mu (A^\mu\not A' - A'^\mu\not A)\,u^{1/2} \tag{143}$$

El último término de (143) no contribuye a S_{fi} pues se anula al integrar sobre s

$$\int d^4s\; \bar u^{3/2}_\mu \left(\not A(p'-s)\,A'^\mu(s-p) - A^\mu(p'-s)\,\not A'(s-p)\right) = 0 \tag{144}$$

haciendo el cambio $s = p + p' - s'$ en el primer término de (144).

El término en (143) que no procede de $\mathcal{L}^{(0)}_{I,RS*}$ (96) conduce a

$$-\frac{i}{6m^2}\left(\bar\Psi_{3/2}\cdot F\cdot\gamma\;\sigma\cdot F\;\phi_{1/2} + \bar\phi_{1/2}\;\sigma\cdot F\;\gamma\cdot F\cdot\Psi_{3/2}\right) \tag{145}$$

en el Lagrangiano efectivo de segundo orden.

e) Transición 1/2 $\longrightarrow$ 3/2 en RS* con acoplo mínimo + Pauli

Con $g_1 = \dfrac{1}{m_{1/2} - 2m}$ se obtienen:

$$T_{fi}^{3/2} = \frac{2N_{1/2}}{3m^2} g_1 \bar{u}_\mu^{3/2} (\not{q}'A'^\mu - q'^\mu \not{A}')(m_{1/2} - \not{s}) \Big\{ \big(\tfrac{1}{2} - m g_1 + 2g_3(m_{1/2} - 2m)\big) \not{q}\not{A} + g_1 A.P \not{A} - g_1 P.q \not{A}$$

$$- g_5 (m_{1/2} - 2m) q^2 \not{A} \Big\} u^{1/2} + N_{1/2} g_1 \bar{u}_\mu^{3/2} (q'^\mu \not{A}' - A'^\mu \not{q}') \not{A} u^{1/2} + N_{1/2} \bar{u}_\mu^{3/2} (A^\mu \not{A}' - A'^\mu \not{A}) u^{1/2} \qquad (146)$$

$$T_{fi}^{1/2} = N_{1/2} g_1 \bar{u}_\mu^{3/2} (\not{A}'A'^\mu - q'^\mu \not{A}') \Big\{ \frac{2}{3m^2} (\not{s} - m_{1/2}) \Big(\big(\tfrac{1}{2} - m g_1 + 2g_3(m_{1/2} - 2m)\big) \not{q}\not{A} + g_1 A.P \not{A} - g_1 P.q \not{A}$$

$$- g_5 (m_{1/2} - 2m) q^2 \not{A} \Big) + \not{A} + \left(\frac{2(m_{1/2} - 3m)}{3m^2} + \frac{4g_3 (m_{1/2} - 2m)^2}{3m^2} \right) \not{q}\not{A} + \frac{1}{3m^2} q^2 \not{A} - \frac{2g_5}{3m^2} (m_{1/2} - 2m)^2 q^2 \not{A} \Big\} u^{1/2} \qquad (147)$$

$$T_{fi} = \frac{2N_{1/2}}{3m^2} g_1 \bar{u}_\mu^{3/2} (\not{A}'A'^\mu - q'^\mu \not{A}') \Big\{ -\tfrac{1}{2} (\not{s} - m_{1/2}) \not{q}\not{A} + \big(m_{1/2} - 3m + 2g_3 (m_{1/2} - 2m)^2\big) \not{q}\not{A} +$$

$$+ \frac{1}{2} q^2 \not{A} - g_5 (m_{1/2} - 2m)^2 q^2 \not{A} \Big\} u^{1/2} + N_{1/2} \bar{u}_\mu^{3/2} (A^\mu \not{A}' - A'^\mu \not{A}) u^{1/2} \qquad (148)$$

Es claro que $S^{(2)}_{1/2 \to 3/2} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay desacoplo entre los campos $\psi_{3/2}$ y $\phi_{1/2}$.

f) Transición 1/2 $\longrightarrow$ 3/2 en RS** con acoplo mínimo

Se elige $u_i^\mu = N_2 \left(P^\mu - \frac{m}{2} \gamma^\mu \right) u^2$

$$T_{fi}^{3/2} = N_2 \bar{u}_\mu^{3/2} (g^{\mu\nu} \not{A}' - A'^\mu \gamma^\nu) \frac{d_{\nu\lambda}^{3/2}}{s^2 - m^2} (\not{q} A^\lambda - q^\lambda \not{A}) +$$

$$+ \frac{2N_2}{3m^2} \bar{u}_\mu^{3/2} (\not{q}'A'^\mu - q'^\mu \not{A}') \left(\not{q}\not{A} + (2m - m_2)(\tfrac{1}{2} - a) \not{A} \right) u^2 + N_2 \bar{u}_\mu^{3/2} (A^\nu \not{A}' - A'^\mu \not{A}) u^2 \qquad (149)$$

$$T^1_{fi} = N_2 c_1 \bar{u}^{3/2}_\mu (\not{q}' A'^\mu - q'^\mu \not{A}') \frac{1}{\not{s} - m_1} \left(\frac{1}{2}(m_2 + m_1 - 2m) \not{q} \not{A} - \frac{1}{2} q^2 \not{A} \right) u^2$$

$$+ N_2 c_1 \bar{u}^{3/2}_\mu (\not{q}' A'^\mu - q'^\mu \not{A}') \left(\frac{1}{2} \not{q} \not{A} - (2m - m_2)\left(\frac{1}{2} - a\right) \not{A} \right) u^2 \qquad (150)$$

$$T^2_{fi} = N_2 c_2 \bar{u}^{3/2}_\mu (\not{q}' A'^\mu - q'^\mu \not{A}') \frac{1}{\not{s} - m_2} \left(\frac{3m^2}{2} \frac{m_2 - m_1}{2m - m_1} \not{A} + (m_2 - m) \not{q} \not{A} - \frac{1}{2} q^2 \not{A} \right) u^2$$

$$+ N_2 c_2 \bar{u}^{3/2}_\mu (\not{q}' A'^\mu - q'^\mu \not{A}') \left(\frac{1}{2} \not{q} \not{A} + (2m - m_2)\left(\frac{1}{2} - a\right) \not{A} \right) u^2 \qquad (151)$$

Por tanto:

$$T_{fi} = N_2 \bar{u}^{3/2}_\mu (g^{\mu\nu} \not{A}' - A'^\mu \gamma^\nu) \frac{d^{3/2}_{\nu\lambda}}{s^2 - m^2} (\not{q} A^\lambda - q^\lambda \not{A}) u^2$$

$$+ N_2 c_1 \bar{u}^{3/2}_\mu (\not{q}' A'^\mu - q'^\mu \not{A}') \frac{1}{\not{s} - m_1} \left(\frac{1}{2}(m_1 + m_2 - 2m) \not{q} \not{A} - \frac{1}{2} q^2 \not{A} \right) u^2$$

$$+ N_2 c_2 \bar{u}^{3/2}_\mu (\not{q}' A'^\mu - q'^\mu \not{A}') \frac{1}{\not{s} - m_2} \left(\frac{3m^2}{2} \frac{m_2 - m_1}{2m - m_1} \not{A} + (m_2 - m) \not{q} \not{A} - \frac{1}{2} q^2 \not{A} \right) u^2$$

$$+ \frac{N_2}{3m^2} \bar{u}^{3/2}_\mu (\not{q}' A'^\mu - q'^\mu \not{A}') \not{q} \not{A} u^2 + N_2 \bar{u}^{3/2}_\mu (A^\mu \not{A}' - A'^\mu \not{A}) u^2 \qquad (152)$$

Análogamente a (143) aparecen extra-términos de segundo orden.

g) Transición 1/2 $\longrightarrow$ 3/2 en RS** con acoplo mínimo + Pauli

Se elige $g_1 = \dfrac{1}{m_2 - 2m}$ entonces

$$T^{3/2}_{fi} = -\frac{2N_2}{3m^2} g_1 \bar{u}^{3/2}_{\mu} (\not{q}' A'^{\mu} - q'^{\mu} \not{A}')(\not{p} - m_2) \Big\{ (1 - m g_1 + 2 g_3 (m_2 - 2m)) \not{q} \not{A} +$$

$$+ \left(\tfrac{1}{2} - a\right)(2m - m_2) \not{A} + g_1 A.p \not{q} - g_1 p.q \not{A} - g_5 (m_2 - 2m) q^2 \not{A} \Big\} u^2 +$$

$$+ N_2 g_1 \bar{u}^{3/2}_{\mu} (q'^{\mu} \not{A}' - A'^{\mu} \not{q}') \not{A} u^2 + N_2 \bar{u}^{3/2}_{\mu} (A^{\mu} \not{A}' - A'^{\mu} \not{A}) u^2 \tag{153}$$

$$T^{1}_{fi} = - g_1 N_2 C_1 \bar{u}^{3}_{\mu} (\not{q}' A'^{\mu} - q'^{\mu} \not{A}') \frac{\not{p} - m_2}{\not{p} - m_1} \Big\{ \not{q} \not{A} \Big(\tfrac{1}{2} (m_1 + m_2 - 2m) - \tfrac{g_1}{2} \big(2m(m_1 + m_2 - 4m) + (m_1 - m_2)^2 \big)$$

$$+ 2 g_3 (m_1 - 2m)(m_2 - 2m) \Big) + q^2 \not{A} \Big(-\tfrac{1}{2} - g_5 (m_1 - 2m)(m_2 - 2m) + \tfrac{1}{2} g_1 (m_1 + m_2 - 4m) \Big\} u^2$$

$$- g_1 N_2 C_1 \bar{u}^{3/2}_{\mu} (\not{q}' A'^{\mu} - q'^{\mu} \not{A}')(\not{p} - m_2) \Big\{ (2m_2 - m_2)\left(\tfrac{1}{2} - a\right) \not{A} +$$

$$+ \left(\tfrac{1}{2} - m g_1 + \tfrac{m_2 - m_1}{2} g_1 + 2 g_3 (m_2 - 2m) \right) \not{q} \not{A} + g_1 A.p \not{q} - g_1 p.q \not{A}$$

$$- g_5 (m_2 - 2m) q^2 \not{A} \Big\} u^2 \tag{154}$$

$$T^{2}_{fi} = - g_1 N_2 C_2 \bar{u}^{3/2}_{\mu} (\not{q}' A'^{\mu} - q'^{\mu} \not{A}') \Big\{ (\not{p} - m_2) \Big((2m - m_2)\left(\tfrac{1}{2} - a\right) \not{A} +$$

$$+ \left(\tfrac{1}{2} - m g_1 + 2 g_3 (m_2 - 2m) \right) \not{q} \not{A} + g_1 A.p \not{q} - g_1 p.q \not{A} - g_5 (m_2 - 2m) q^2 \not{A} \Big) +$$

$$+ \frac{3m^2}{2} \frac{m_2 - m_1}{2m - m_1} \not{A} + \left(m_2 - 3m + 2 g_3 (2m - m_2)^2 \right) \not{q} \not{A} + \left(\tfrac{1}{2} - g_5 (2m - m_2)^2 \right) q^2 \not{A} \Big\} u^2 \tag{155}$$

Nota: Se han escrito explícitamente las expresiones de T^{ℓ}_{fi} para observar de que manera se producen las cancelaciones entre términos procedentes de distintos l's. Imponiendo las condiciones (115)

$$T_{fi} = - g_1 N_2 C_2 \bar{u}^{3/2}_{\mu} (\not{p}_1 A^{\mu} - q^{\mu} \not{A}) \Big\{ (m_2 - 3m + 2 g_3 (2m - m_2)^2) \not{p}_1 \not{A} + \left(\frac{1}{2} - g_5 (2m - m_2)^2 \right) q^2 \not{A} \Big\} u^2 =$$

$$= - \frac{1}{2} g_1 N_2 C_2 (m_1 - m_2) \bar{u}^{3/2}_{\mu} (\not{p}_1 A^{\mu} - q^{\mu} \not{A}) \not{p}_1 \not{A} u^2 \qquad (156)$$

Lamentablemente $m_1 \neq m_2 \Longrightarrow S^{(2)}_{1/2 \to 3/2} \neq 0$ no obteniéndose una teoría unitaria.

Es fácil constatar por los casos estudiados la insuficiencia de la descomposición (118) en el estudio de $S^{(n)}_{fi}$ ($n \geq 2$), debido a que se generan términos adicionales no presentes en $\mathcal{L}^{(0)'}_{I}(\phi_{ph})$ ó $\mathcal{L}^{(0)''}_{I}(\phi_{gh})$ y que inducen transiciones $\phi_{ph} \leftrightarrow \phi_{gh}$

La resolución del problema es especialmente compleja motivada por la ausencia de técnicas específicas como metodología de trabajo. La solución expuesta previamente hemos visto que no es satisfactoria. Tal vez, construyendo un Lagrangiano de interacción efectivo $\mathcal{L}^{(0)}_{eff}(\phi_{ph}, \phi_{gh})$ que llevase a la misma matriz S obtenida a partir de $\mathcal{L}^{(0)}_{I}(\psi)$ con un potencial B(x) de manera que

$$\mathcal{L}^{(0)}_{I\,eff} = \mathcal{L}^{(0)'}_{I\,eff}(\phi_{ph}) + \mathcal{L}^{(0)''}_{I\,eff}(\phi_{gh})$$

condujese a una resolución del mismo. Es evidente, pues, que no exista un único tratamiento. El estudio del mismo, aunque interesante, considero, rebasa el marco de este trabajo.

V.6 VIOLACION DE CAUSALIDAD Y SERIE DE PERTURBACIONES

La función de Green $S_R(x,y;B)$ se obtiene iterando la ecuación integral (47):

$$S_R(x,y;B) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}_R(x,y;B) \qquad (157a)$$

donde

$$S_R^{(0)}(x,y;B) = S_R(x-y)$$

$$S_R^{(n)}(x,y;B) = (-1)^n \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \; S_R(x-x_1) B(x_1) \cdots\cdots \; B(x_n$$

Dado que $S_R(x-y)$ se anula para intervalos x-y de tipo

$$S_R^{(n)}(x,y;B) = 0 \qquad\qquad (x-y)^2 < 0 \qquad \forall$$

es decir, $S_R^{(n)}$ es causal para cada orden en el desarrollo p
(157a) $S_R(x,y;B)$ sería también causal en contradicción con
nidos en el estudio de la propagación de soluciones en RS y

El origen de esta contradicción puede explicarse si at
posición (53) de $S_R(x-y)$

$$S_R(x-y) = \tilde{S}_R(x-y) + \hat{S}_R(x-y)$$

$$\tilde{S}_R(x-y) = -i\,\theta(x^0-y^0) \sum_n \varepsilon_n \Psi_n(x) \overline{\Psi}_n(y)$$

$$\hat{S}_R(x-y) = \sum_\ell \frac{1}{2}\left[d_\ell(i\partial_x), \varepsilon(x^0-y^0)\right] \Delta(x-y, m_\ell) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\,\varepsilon(x^0-y^0),\,\partial_\mu\partial_\nu\partial_\lambda\right]\,\Delta(x-y) =$$

$$= \left(n_\mu n_\nu \partial_\lambda + n_\nu n_\lambda \partial_\mu + n_\mu n_\lambda \partial_\nu + 2\, n_\mu n_\nu n_\lambda n^\rho \partial_\rho\right)\ \delta^4(x-y) \qquad (160c)$$

se deduce

$$\hat{d}_{3/2}(i\partial,n)_{\mu\nu} = \frac{1}{3m}\,\not{n}\,\gamma_\mu n_\nu + \frac{1}{3m}\, n_\mu \gamma_\nu \not{n} +$$

$$+ \frac{2i}{3m^2}\left(n_\mu n_\nu \not{\partial} + \partial_\mu n_\nu \not{n} + n_\mu \partial_\nu \not{n} + 2 n_\mu n_\nu \not{n}\, n^\rho \partial_\rho\right) \qquad (161a)$$

$$\hat{d}_l\,(i\partial,n)_{\mu\nu} = \frac{mC_l}{2}\,\not{n}\,\gamma_\mu n_\nu + \frac{mC_l}{2}\, n_\mu \gamma_\nu \not{n} + (ml-2m)C_l\, n_\mu n_\nu +$$

$l=\frac{1}{2},1,2$

$$+\, iC_l\left(n_\mu n_\nu \not{\partial} + \partial_\mu n_\nu \not{n} + n_\mu \partial_\nu \not{n} + 2 n_\mu n_\nu \not{n}\, n^\rho \partial_\rho\right) \qquad (161b)$$

y por tanto

$$\hat{d}_{RS^*}(i\partial,n)_{\mu\nu} = \frac{2(2m-m_{1/2})}{3m^2}\, n_\mu n_\nu \qquad (162a)$$

$$\hat{d}_{RS^{**}}(i\partial,n)_{\mu\nu} = 0 \qquad (162b)$$

Sumando las contribuciones precedentes de $\hat{S}_R(x-y)$ en RS^* se obtiene una serie geométrica

$$\hat{S}_R(x,y;B)_{\mu\nu} = \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \left(\hat{d}(n)\,B(x)\right)^N_{\mu\lambda}\ \hat{d}^{\lambda}{}_{\nu}(n)\ \delta^4(x-y) = \qquad (163)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \left(\frac{2(2m-m_{1/2})}{3m^2}\, n.B.n\right)^N \hat{d}_{\mu\nu}(n)\,\delta^4(x-y) = \left(1+\frac{2(2m-m_{1/2})}{3m^2}\, n.B.n\right)^{-1}\hat{d}_{\mu\nu}(n)\,\delta^4(x-y)$$

donde

$$S_R^{(0)}(x,y;B) = S_R(x-y) \tag{157b}$$

$$S_R^{(n)}(x,y;B) = (-1)^n \int d^4y_1 \cdots d^4x_n \; S_R(x-x_1)B(x_1) \cdots\cdots B(x_n) S_R(x_n-y) \tag{157c}$$

Dado que $S_R(x-y)$ se anula para intervalos x-y de tipo espacio se tiene

$$S_R^{(n)}(x,y;B) = 0 \qquad (x-y)^2 < 0 \qquad \forall n \tag{158}$$

es decir, $S_R^{(n)}$ es causal para cada orden en el desarrollo perturbativo y según (157a) $S_R(x,y;B)$ sería también causal en contradicción con los resultados obtenidos en el estudio de la propagación de soluciones en RS y RS*-Pauli [8].

El origen de esta contradicción puede explicarse si atendemos a la descomposición (53) de $S_R(x-y)$

$$S_R(x-y) = \tilde{S}_R(x-y) + \hat{S}_R(x-y) \tag{159a}$$

$$\tilde{S}_R(x-y) = -i\,\theta(x^0-y^0) \sum_n \varepsilon_n \Psi_n(x) \overline{\Psi}_n(y) \tag{159b}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_R(x-y) &= \sum_\ell \tfrac{1}{2} \left[d_\ell(i\partial_x), \varepsilon(x^0-y^0) \right] \Delta(x-y, m_\ell) = \\ &= \sum_\ell \hat{d}_\ell(i\partial_x, n)\, \delta^4(x-y) \end{aligned} \tag{159c}$$

donde $n^\mu \partial_\mu = \partial_0$.

Teniendo en cuenta [43]

$$\tfrac{1}{2} \left[\varepsilon(x^0-y^0), \partial_\mu \right] \Delta(x-y) = 0 \tag{160a}$$

$$\tfrac{1}{2} \left[\varepsilon(x^0-y^0), \partial_\mu \partial_\nu \right] \Delta(x-y) = \eta_\mu n_\nu \, \delta^4(x-y) \tag{160b}$$

$$\frac{1}{2}\left[\, \varepsilon(x^0-y^0)\,,\, \partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda \right] \Delta(x-y) =$$

$$= \left(n_\mu n_\nu \partial_\lambda + n_\nu n_\lambda \partial_\mu + n_\mu n_\lambda \partial_\nu + 2\, n_\mu n_\nu n_\lambda n^\rho \partial_\rho \right) \delta^4(x-y) \qquad \text{(160c)}$$

se deduce

$$\hat{d}_{3/2}(i\partial, n)_{\mu\nu} = \frac{1}{3m} \not n\, \gamma_\mu n_\nu + \frac{1}{3m} n_\mu \gamma_\nu \not n +$$

$$+ \frac{2i}{3m^2}\left(n_\mu n_\nu \not\partial + \partial_\mu n_\nu \not n + n_\mu \partial_\nu \not n + 2 n_\mu n_\nu \not n\, n^\rho \partial_\rho \right) \qquad \text{(161a)}$$

$$\hat{d}_l\,(i\partial, n)_{\mu\nu} = \frac{m C_l}{2} \not n\, \gamma_\mu n_\nu + \frac{m C_l}{2} n_\mu \gamma_\nu \not n + (m_l - 2m) C_l\, n_\mu n_\nu +$$

$l = \frac{1}{2}, 1, 2$

$$+ i C_l \left(n_\mu n_\nu \not\partial + \partial_\mu n_\nu \not n + n_\mu \partial_\nu \not n + 2 n_\mu n_\nu \not n\, n^\rho \partial_\rho \right) \qquad \text{(161b)}$$

y por tanto

$$\hat{d}_{RS^*}(i\partial, n)_{\mu\nu} = \frac{2(2m - m_{1/2})}{3m^2} n_\mu n_\nu \qquad \text{(162a)}$$

$$\hat{d}_{RS^{**}}(i\partial, n)_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(162b)}$$

Sumando las contribuciones precedentes de $\hat{S}_R(x-y)$ en RS^* se obtiene una serie geométrica

$$\hat{S}_R(x,y;B)_{\mu\nu} = \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \left(\hat{d}(n)\, B(x) \right)^N_{\mu\lambda} \hat{d}^{\lambda}{}_{\nu}(n)\; \delta^4(x-y) = \qquad \text{(163)}$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \left(\frac{2(2m - m_{1/2})}{3m^2} n.B.n \right)^N \hat{d}_{\mu\nu}(n)\, \delta^4(x-y) = \left(1 + \frac{2(2m - m_{1/2})}{3m^2} n.B.n \right)^{-1} \hat{d}_{\mu\nu}(n)\, \delta^4(x-y)$$

que converge si $1 + \frac{2(2m-m^{1/2})}{3m^2} n.B.n$ es una matriz invertible, o bien si

$$\det\left(1 + \frac{2(2m-m^{1/2})}{3m^2}\, n.B.n\right) \neq 0 \qquad (164)$$

esta condición coincide con la que se ha de imponer a fin de obtener relaciones de anticonmutación bien definidas (IV.133).

APENDICE A

El sistema de ecuaciones (I,S-1) se puede escribir en forma de ecuación de Schrodinger

$$i\,\partial_t\,\psi^{\mu}(\vec{x},t) = H^{\mu}{}_{\nu}\,\psi^{\nu}(\vec{x},t) \tag{1}$$

con $H^{\mu}{}_{\nu} = (\vec{\alpha}.\vec{\pi} + \beta m + e A^0)\, g^{\mu}_{\nu}$

El producto escalar que resulta de la componente temporal de la corriente conservada:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = -\int \bar{\psi}_{\mu}\,\gamma^0\,\psi^{\mu}\,d^3x = \int \left(\vec{\psi}_1^{\dagger}\cdot\vec{\psi}_2 - \psi_1^{0\dagger}\,\psi_2^{0}\right) d^3x \tag{2}$$

no es definido positivo y solo con un cambio de signo de la componente ψ_0 se conseguiría que lo fuera en cuyo caso no sería invariante relativista (dependencia a la superficie de tipo espacio de integración).

En el caso libre se puede escoger un subespacio de soluciones sobre el cual el producto escalar $\langle\, ,\,\rangle$ es definido positivo. Este es el papel de las ligaduras y que en el formalismo Hamiltoniano lo desempeñan los proyectores que definiremos a continuación

$$P^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{1}{2}\,\gamma^{\mu\dagger}\,\gamma_{\nu} \tag{3}$$

que es idempotente y hermítico respecto a la métrica

$$P^{\mu}{}_{\nu} \cdot P^{\nu}{}_{\lambda} = P^{\mu}{}_{\lambda}$$

$$< \psi_1 , P\psi_2 > = < \psi_2 , P\psi_1 >^* \qquad (4)$$

Esta última propiedad es también satisfecha por el Hamiltoniano $H^{\mu}{}_{\nu}$. El proyector ortogonal al subespacio P es por tanto

$$Q^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} - P^{\mu}{}_{\nu} \qquad (5)$$

con lo que la condición (1,1-2) se traduce en términos de Q en

$$Q^{\mu}{}_{\nu}\, \psi^{\nu}(t) = \psi^{\mu}(t) \qquad (6)$$

El subespacio Q será invariante bajo la evolución generada por H si Q es una constante del movimiento

$$i \frac{dQ}{dt} + [Q, H] = 0 \qquad (7)$$

Relación que no es válida pues el operador $\tilde{P}$ definido por

$$\tilde{P}^{\mu}{}_{\nu} = [P, H]^{\mu}{}_{\nu} = [P^{\mu}{}_{\nu}, \vec{\alpha}.\vec{\pi} + \beta m + e A_o] \qquad (8)$$

es no trivial

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{o}{}_{o} &= 0 \\ \tilde{P}^{o}{}_{i} &= \pi^i - h\alpha_i \\ \tilde{P}^{i}{}_{o} &= -\pi^i + h\alpha_i \\ \tilde{P}^{i}{}_{j} &= \alpha_i \pi^j - \alpha_j \pi^i \end{aligned} \qquad (9)$$

con $h = \vec{\alpha}.\vec{\pi} + \beta m$

La actuación de $\tilde{P}$ sobre una función ψ_μ queda claramente expuesta si se define

$$
\begin{aligned}
\varphi^\mu &= \tilde{P}^\mu{}_\nu \, \psi^\nu \\
\varphi^0 &= \vec{\pi}.\vec{\psi} - h\vec{\alpha}.\vec{\psi} \equiv \vec{V}.\vec{\psi} \qquad (10)\\
\vec{\phi} &= -\vec{V}.\psi^0 + \vec{\alpha}(\vec{\pi}.\vec{\psi}) - \vec{\pi}(\vec{\alpha}.\vec{\psi})
\end{aligned}
$$

El cálculo del conmutador de $\tilde{P}_o$ y H_o en el caso libre con

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}^0{}_i &= -\tilde{P}^i{}_0 = V^i = p^i - h_o\alpha_i \\
\tilde{P}^i{}_j &= -\varepsilon_{ijk}\,(\vec{p}\times\vec{\alpha})^k
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

conduce a

$$
\begin{aligned}
[\vec{V}_o, h_o] &= -h_o[\vec{\alpha}, h_o] = -2h_o\vec{V}_o \\
[\vec{p}\times\vec{\alpha}, h_o] &= \vec{p}\times[\vec{\alpha}, h_o] = 2\,\vec{p}\times\vec{V} = -2h_o\vec{p}\times\vec{\alpha}
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

de donde resulta que $\tilde{P}_o$ y H_o anticonmutan entre sí

$$
\left.
\begin{aligned}
\{\vec{V}_o, h_o\} &= 0 \\
\{\vec{p}\times\vec{\alpha}, h_o\} &= 0
\end{aligned}
\right\}
\Rightarrow \{\tilde{P}_o, H_o\} = 0 \qquad (13)
$$

y como consecuencia la dinámica preserva el subespacio de soluciones que cumplen $\tilde{P}_o\,\psi(t) = 0$ ya que

$$
i\frac{d}{dt}\tilde{P}_o\psi(t) = \tilde{P}_o H_o \psi(t) = -H_o\tilde{P}_o\psi(t) \qquad (14)
$$

Sobre este subespacio se satisface la ligadura (6) para todo instante pues:

$$\left(i \frac{dQ_o}{dt} + [Q_o, H_o] \right)_{\tilde{P}_o^{\perp}} = 0 \tag{15}$$

Un estudio más detallado muestra que al aplicar el operador $\tilde{P}_o$ a una solución libre ψ_μ de masa $\pm$ m y $\gamma.\psi \neq 0$ la transforma en otra solución $(\tilde{P}_o \psi)^\mu$ libre de masa $\mp$ m, lo cual está de acuerdo con la ecuación libre

$$(\gamma.p - m)(\gamma.p + m)\ \gamma.\psi = 0$$

deducida a partir de (I,1.1).

La ecuación (14) sería válida en interacción si se cumpliese

$$i \frac{d\tilde{P}}{dt} + \{ \tilde{P}, H \} = 0 \tag{16}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} &\left(i \frac{d\vec{v}}{dt} + \{ \vec{v}, h + e A^o \} \right) \vec{\psi} = 0 \\ &\left(-i \frac{d\vec{v}}{dt} + \{ \vec{v}, h + e A_o \} \right) \psi^o + \left(i \frac{d\vec{\pi}}{dt} \times \vec{\alpha} + \{ \vec{\pi} \times \vec{\alpha}, h + e A_o \} \right) \times \vec{\psi} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

lo que no es cierto en general.

Estas ecuaciones se convierten con la ayuda de

$$\begin{aligned} [\vec{\pi}, h] &= ie\, \vec{\alpha} \times \vec{B} \\ [\vec{\pi}, A_o] &= -i\, \vec{\nabla} A_o \\ [\vec{\pi}, h] &= 2\, \vec{v} \\ \vec{\pi} \times \vec{\pi} &= -ie\, \vec{B} \end{aligned} \tag{18}$$

y para funciones Ψ que satisfacen las condiciones

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\Psi} = 0$$
$$-\vec{\nabla}\psi^0 + \vec{\alpha}\,(\vec{\pi}\cdot\vec{\Psi}) - \vec{\pi}\,(\vec{\alpha}\cdot\vec{\Psi}) = 0 \tag{19}$$

en unas nuevas condiciones adicionales

$$\left(\vec{E} - (\vec{\alpha}\cdot\vec{E})\,\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{\Psi} = 0 \tag{20a}$$

$$\left(\vec{E} - (\vec{\alpha}\cdot\vec{E})\,\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\times\vec{B}\right)\psi^0 + \left(2\vec{B} + (\vec{\alpha}\times\vec{B})\times\vec{\alpha} - \vec{E}\times\vec{\alpha}\right)\times\vec{\Psi} = 0 \tag{20b}$$

análogas a la condición

$$\gamma.F.\psi = \gamma_0\left(\vec{E}\cdot\vec{\Psi} - \vec{\alpha}\cdot\vec{E}\,\psi^0 + (\vec{\alpha}\times\vec{B}\,|\,\vec{\Psi})\right) \tag{21}$$

que coincide con (20a) si $\psi_0 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\Psi}$

APENDICE B

B.1 Se ha usado la métrica $g_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$ y $\varepsilon^{0123} = +1$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

$$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

De gran utilidad son las relaciones

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}$$

$$\gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i \sigma^{\mu\nu}$$

$$\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} \gamma^5 + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \sigma_{\lambda\rho}$$

$$\gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \gamma^5 \gamma_\rho + i (g^{\lambda\mu} \gamma^\nu - g^{\lambda\nu} \gamma^\mu)$$

$$[\gamma^\lambda, \sigma^{\mu\nu}] = 2i (g^{\mu\lambda} \gamma^\nu - g^{\nu\lambda} \gamma^\mu)$$

$$\{\gamma^\lambda, \sigma^{\mu\nu}\} = 2 \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \gamma^5 \gamma_\rho$$

$$\sigma^{\lambda\rho} \sigma^{\mu\nu} = i \varepsilon^{\lambda\rho\mu\nu} \gamma^5 + i (g^{\rho\mu} \sigma^{\lambda\nu} + g^{\lambda\nu} \sigma^{\rho\mu} - g^{\rho\nu} \sigma^{\lambda\mu} - g^{\lambda\mu} \sigma^{\rho\nu}) + g^{\rho\nu} g^{\lambda\mu} - g^{\rho\mu} g^{\lambda\nu}$$

$$\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \sigma_{\lambda\rho}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\tau\sigma\eta\chi} = -\begin{vmatrix} g^{\mu}_{\tau} & g^{\mu}_{\sigma} & g^{\mu}_{\eta} & g^{\mu}_{\chi} \\ g^{\nu}_{\tau} & g^{\nu}_{\sigma} & g^{\nu}_{\eta} & g^{\nu}_{\chi} \\ g^{\lambda}_{\tau} & g^{\lambda}_{\sigma} & g^{\lambda}_{\eta} & g^{\lambda}_{\chi} \\ g^{\rho}_{\tau} & g^{\rho}_{\sigma} & g^{\rho}_{\eta} & g^{\rho}_{\chi} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\tau\sigma\eta\rho} = -\begin{vmatrix} g^{\mu}_{\tau} & g^{\mu}_{\sigma} & g^{\mu}_{\rho} \\ g^{\nu}_{\tau} & g^{\nu}_{\sigma} & g^{\nu}_{\rho} \\ g^{\lambda}_{\tau} & g^{\lambda}_{\sigma} & g^{\lambda}_{\rho} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\tau\sigma\lambda\rho} = -2\,(g^{\mu}_{\tau}\,g^{\nu}_{\sigma} - g^{\mu}_{\sigma}\,g^{\nu}_{\tau})$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\tau\nu\lambda\rho} = -6\,g^{\mu}_{\tau}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = -24$$

Si $F_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico entonces

$$F_{\mu\lambda}\,F^{\lambda}{}_{\nu} - \widetilde{F}_{\mu\lambda}\,\widetilde{F}^{\lambda}{}_{\nu} = (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)\,g_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\,F^{\lambda\rho}\,F_{\lambda\rho}\,g_{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\lambda}\,\widetilde{F}^{\lambda}{}_{\nu} = \widetilde{F}_{\mu\lambda}\,F^{\lambda}{}_{\nu} = \vec{E}\cdot\vec{B}\,g_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\,F^{\lambda\rho}\,\widetilde{F}_{\lambda\rho}\,g_{\mu\nu}$$

$$\sigma.F\;\gamma.\psi = 2\cdot(i\,\gamma.F.\psi - \gamma^5\,\gamma.\widetilde{F}.\psi)$$

$$(\sigma.F)^2 = 2\,(F.F + i\,F.\widetilde{F}\,\gamma^5)$$

$$\sigma.F\,\gamma.F.\psi = 2i\,\gamma.F.F.\psi - 2\gamma^5\,\gamma.\tilde{F}.F.\psi$$

$$\gamma.F.\gamma = -i\,\sigma.F$$

$$i\gamma^5\,\sigma.\tilde{F} = \sigma.F$$

$$\gamma^5\gamma^\mu\gamma_\lambda\tilde{F}^\lambda{}_\nu = \tilde{F}^\mu{}_\nu\,\gamma^5 + \frac{1}{2}\,g^\mu_\nu\,\sigma.F + F^{\mu\lambda}\,\sigma_{\lambda\nu}$$

$$\varepsilon^{\mu\lambda\tau\rho}\,\tilde{F}_{\lambda\nu} = g^\mu_\nu\,F^{\tau\rho} + g^\tau_\nu\,F^{\rho\mu} + g^\rho_\nu\,F^{\mu\tau}$$

B.2 El Lagrangiano de interacción más general construible a partir de F que conserve la paridad es de la forma:

$$\mathcal{L}_F(x) = \sum_\ell a_\ell\,L^{\mu\nu}_\ell(x)\,F_{\mu\nu}(x)$$

siendo $L^{\mu\nu}_l(x)$ un bilineal tensorial obtenido por contracción del tensor $\bar{\psi}^\lambda_\alpha\,(\Gamma^{in})_{\alpha\beta}\,\psi^\tau_\beta$ con $g_{\rho\sigma}$ y $\varepsilon_{\rho\sigma\eta\chi}$, y $\Gamma^{in}_{\alpha\beta} = (\mathbb{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5\gamma^\mu, \gamma^5)_{\alpha\beta}$

$$L^{\mu\nu}_S = \bar{\psi}^\mu\,\psi^\nu$$

$$L^{\mu\nu}_{T_1} = \bar{\psi}^\lambda\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi_\lambda$$

$$L^{\mu\nu}_{T_2} = \bar{\psi}_\lambda\,\sigma^{\lambda\mu}\,\psi^\nu$$

$$L^{\mu\nu}_{T_3} = \bar{\psi}^\mu\,\sigma^{\nu\lambda}\,\psi_\lambda$$

$$L^{\mu\nu}_{PS} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\tau}\,\bar{\psi}_\lambda\,\gamma^5\,\psi_\tau$$

La "realidad" de $\mathcal{L}_F$ implica

$$a_S^* = -a_S$$

$$a_{T_1}^* = a_{T_1}$$

$$a_{T_2}^* = a_{T_3}$$

$$a_{PS}^* = a_{PS}$$

$\mathcal{L}_F$ puede escribirse también

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}_\mu \, T^{\mu\nu} \cdot \psi_\nu$$

$$T_{\mu\nu} = a_S F_{\mu\nu} + a_{T_1} g_{\mu\nu} \sigma.F + a_{T_2} \sigma_\mu{}^\lambda F_{\lambda\nu} + a_{T_2}^* F_\mu{}^\lambda \sigma_{\lambda\nu} + a_{PS} \gamma^5 \tilde{F}_{\mu\nu}$$

Otras formas de $T_{\mu\nu}$ se obtienen por medio de las relaciones

$$\bar{\psi}.\sigma.F.\psi = i\,(\bar{\psi}.\gamma\,\gamma.F.\psi - \bar{\psi}.F.\psi)$$

$$\bar{\psi}.F.\sigma.\psi = i\,(\bar{\psi}.F.\gamma\,\gamma.\psi - \bar{\psi}.F.\psi)$$

$$\bar{\psi}.\gamma\,\sigma.F\gamma.\psi = -2i\,\bar{\psi}.F.\psi + 2\,\bar{\psi}\gamma^5.\tilde{F}.\psi + \bar{\psi}\,\sigma.F\,\psi$$
$$+ 2i\,(\bar{\psi}.\gamma\,\gamma.F.\psi + \bar{\psi}.F.\gamma\,\gamma.\psi)$$

$$\bar{\psi}\gamma^5.\sigma.\tilde{F}.\psi = i\,(\bar{\psi}.F.\sigma.\psi + \tfrac{1}{2}\,\bar{\psi}\,\sigma.F\,\psi)$$

$$\bar{\psi}\gamma^5.\tilde{F}.\sigma.\psi = i\,(\bar{\psi}.\sigma.F.\psi + \tfrac{1}{2}\,\bar{\psi}\,\sigma.F\,\psi)$$

$$\bar{\psi}.\gamma\,\gamma^5\gamma.\tilde{F}.\psi = i\,\bar{\psi}.\gamma\,\gamma.F.\psi - \tfrac{1}{2}\,\bar{\psi}.\gamma\,\sigma.F\,\gamma.\psi$$

$$\bar{\Psi}.\tilde{F}.\gamma\gamma^5\gamma.\psi = i\,\bar{\Psi}.F.\gamma\,\gamma.\psi - \frac{1}{2}\,\bar{\Psi}.\gamma\,\sigma.F\,\gamma.\psi$$

$$\bar{\Psi}^\lambda\sigma^\rho_{\ \mu}\psi^\tau\varepsilon_{\lambda\rho\tau\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = i\,(-\bar{\Psi}\gamma^5.\tilde{F}.\sigma.\psi + \bar{\Psi}\gamma^5\sigma.\tilde{F}'.\psi)$$

$$\gamma^5\sigma^{\rho\mu}\varepsilon_{\lambda\rho\tau\nu} = i\,(g^\mu_{\ \lambda}\,\sigma_{\tau\nu} + g^\mu_{\ \tau}\,\sigma_{\nu\lambda} + g^\mu_{\ \nu}\,\sigma_{\lambda\tau})$$

en particular

$$T_{\mu\nu} = i\,g_2\,F_{\mu\nu} + g_3\,\gamma_\mu\,\sigma.F\,\gamma_\nu + g_4\,g_{\mu\nu}\,\sigma.F + i\,g_1\,\gamma_\mu\,\gamma.F_\nu + i\,g_1^*\,F_\mu.\gamma\,\gamma_\nu$$

$$a_S = i\,(g_2 + 2g_3 + g_1 + g_1^*)$$

$$a_{T_1} = g_3 + g_4$$

$$a_{T_2} = g_1 + 2g_3$$

$$a_{PS} = 2g_3$$

Para el cálculo de $D(n,F)_{RS^*}$ se tiene en cuenta:

$$\gamma_\mu T^{\mu\nu} = (a_S - 2i\,a_{T_1} + 3i\,a_{T_2} + i\,a^*_{T_2})\,\gamma.F^\nu - (2a_{T_1} + 2a^*_{T_2} + a_{PS})\,\gamma^5\gamma.\tilde{F}^\nu$$

$$n.T.n = a_{T_1}\,n^2\,\sigma.F + i\,(a_{T_2} + a^*_{T_2})\,\gamma.n\,\gamma.F.n$$

B.3 Contrariamente a lo que ocurre con las trazas de γ's no existe en la literatura teoremas que permitan calcular determinantes de matrices relativistas. Sin embargo es posible obtener ciertas reglas prácticas que simplifican enormemente el trabajo. Ilustrémoslo con un caso particular extraido del estudio de las velocidades características de RS^*-Pauli en la forma simplificada

$$\mathcal{L}_{RS^*} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{min} + g\ \bar{\Psi}.\gamma\ \gamma.F.\Psi - g^*\ \bar{\Psi}.F.\gamma\ \gamma.\Psi$$

El determinante característico es

$$D(n,F) = \left|\ \gamma.n\ g_\mu^{\ \lambda} + \frac{2m-m^{1/2}}{6m^2}\ \gamma_\mu \left\{ 2g\ \gamma.n\ \gamma.F^\lambda + i g^*\gamma.n\,\sigma.F\,\gamma^\lambda + 2g^*\,n.F\gamma\gamma^\lambda \right\} \right|$$

que se simplifica por medio de

$$\frac{i}{2}\ \gamma.n\ \sigma.F + n.F.\gamma = i\gamma^5\ n.\tilde{F}.\gamma$$

$$\frac{2m-m^{1/2}}{3m^2}\ F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}$$

Eligiendo $n_\mu = n(1,\vec{0})$ y multiplicando por la izquierda con $|\gamma^0 g_\nu^{\ \mu}| = 1$

$$D(n) = n^{16}\ \left|\ g_\mu^{\ \lambda} + g\,g_{\mu\mu}\ \gamma_\mu\ \gamma.F^\lambda - i g^*\,g_{\mu\mu}\ \gamma_\mu\ \vec{\Sigma}.\vec{B}\,\gamma^\lambda \right| = \left|\ A_\mu^{\ \lambda} \right|$$

Los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se escogen

$$\vec{B} = (0,0,B)$$

$$\vec{E} = (0,E_2,E_3)$$

luego:

$$A_0^{\ 0} = 1 - g\ \vec{\alpha}.\vec{E} - i g^*\ \vec{\Sigma}.\vec{B}$$

$$A_0^{\ i} = -g\,E_i - g(\vec{\alpha}\times\vec{B})_i - i g^*\ \vec{\Sigma}.\vec{B}\,\alpha_i$$

$$A_i^{\ 0} = -g\ \gamma^i\ \vec{\gamma}.\vec{E} + i g^*\ \alpha_i\ \vec{\Sigma}.\vec{B}$$

$$A_i{}^j = \delta_i^j + q\,\alpha_i E_j - q\,\gamma^i(\vec{r}\times\vec{B})^j - ig^*\,\gamma^i\,(\vec{\Sigma}.\vec{B})\gamma^j$$

en las expresiones anteriores $E_i \equiv E^i$, $B_i \equiv B^i$.

A continuación se escriben $A_\mu{}^\lambda$ para μ y λ en términos de α's, Σ's y γ's con los $\vec{E}$ y $\vec{B}$ elegidos, se construye D(n) en función de las matrices de Pauli σ's y finalmente el determinante 16 x 16 que resulta ser Det.1. Una observación atenta muestra la similitud entre numerosas filas agrupadas de 4 en 4: (1,8,12,15), (2,7,11,16), (3,6,10,13), (4,5,9,14), lo que permite simplificar tres filas de cada grupo sumándolas una cualquiera de ellas multiplicada por ($\pm$ 1, $\pm$ i). Haciendo esto para las 12 primeras filas:

(+) 8 $\rightarrow$ 1	(+) 14 $\rightarrow$ 5	(-i) 14 $\rightarrow$ 9	
(+) 7 $\rightarrow$ 2	(-) 13 $\rightarrow$ 6	(-i) 13 $\rightarrow$ 10	(Filas)
(+) 6 $\rightarrow$ 3	(+) 16 $\rightarrow$ 7	(-i) 16 $\rightarrow$ 11	
(+) 5 $\rightarrow$ 4	(-) 15 $\rightarrow$ 8	(-i) 15 $\rightarrow$ 12	

se obtiene (Det.2) cuyo valor ha de coincidir con el anterior Det.1. Repitiendo la operación anterior con las columnas

(-) 4 $\rightarrow$ 5
(-) 3 $\rightarrow$ 6
(-) 2 $\rightarrow$ 7 (Columnas)
(-) 1 $\rightarrow$ 8

pasamos a un determinante 12 x 12 (Det.3). Finalmente si se realiza la operación

(+) 2 + (i) 6 $\rightarrow$ 9
(-) 1 + (i) 5 $\rightarrow$ 10
(+) 4 + (i) 8 $\rightarrow$ 11 (Columnas)
(-) 3 + (i) 7 $\rightarrow$ 12

se obtiene un determinante 4 x 4 cuyo cálculo es inmediato

$$
D = \begin{vmatrix} 1+2i(g^*-g)B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i(g^*-g)B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i(g^*-g)B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2i(g^*-g)B \end{vmatrix}
$$

es decir

$$
D(n,F) = n^{16} \left(1 + \left(\frac{2(2m-m'_2)}{3m^2} (g^*-g)B \right)^2 \right)^2
$$

el cual coincide con el obtenido en (II.53) para este caso especial por el método de Madore-Tait.

Otras veces no es necesario sumar sino reordenar las filas o columnas como en el cálculo de $|A^0 - xI|$ (I.45) dado explícitamente en Det.4. Dicho determinante con la ordenación

(1,8,12,15), (2,7,11,16), (3,6,10,13), (4,5,9,14)

se reduce a cuatro determinantes 4 x 4 que coinciden entre sí. (Det.5)

En los casos más complicados habrá que combinar las reglas anteriores y otras sugeridas por la forma del determinante. Por ejemplo si el determinante es de orden 2N y se puede escribir

$$
\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B|\,|A-B|
$$

donde A y B son matrices cuadradas de orden N, quedando reducido su cálculo a dos determinantes de orden N.

Lo que nunca es aconsejable es desarrollar por menores complementarios pues las simplificaciones entre términos se convierte en una ardua tarea.

DET 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	$1-ig^*B$	·	$-gE_3$	igE_2	·	·	·	$-i(g^*-g)B$	$-gE_2$	·	·	$(g-g^*)B$	$-gE_3$	·	$-ig^*B$	·
2	·	$1+ig^*B$	$-igE_2$	gE_3	·	·	$i(g^*-g)B$	·	·	$-gE_2$	$(g-g^*)B$	·	·	$-gE_3$	·	$-ig^*B$
3	$-gE_3$	igE_2	$1-ig^*B$	·	·	$-i(g^*-g)B$	·	·	·	$(g-g^*)B$	$-gE_2$	·	$-ig^*B$	·	$-gE_3$	·
4	$-igE_2$	gE_3	·	$1+ig^*B$	$i(g^*-g)B$	·	·	·	$(g-g^*)B$	·	·	$-gE_2$	·	$-ig^*B$	·	$-gE_3$
5	igE_2	$-gE_3$	·	$-ig^*B$	$1+i(g-g^*)B$	·	·	·	$(g^*-g)B$	·	·	gE_2	·	ig^*B	·	gE_3
6	gE_3	$-igE_2$	ig^*B	·	·	$1-i(g-g^*)B$	·	·	·	$(g^*-g)B$	gE_2	·	ig^*B	·	gE_3	·
7	·	$-ig^*B$	igE_2	$-gE_3$	·	·	$1+i(g-g^*)B$	·	·	gE_2	$(g^*-g)B$	·	·	gE_3	·	ig^*B
8	ig^*B	·	gE_3	$-igE_2$	·	·	·	$1-i(g-g^*)B$	gE_2	·	·	$(g^*-g)B$	gE_3	·	ig^*B	·
9	gE_2	igE_3	·	$-g^*B$	$(g-g^*)B$	·	·	·	$1+i(g-g^*)B$	·	·	$-igE_2$	·	g^*B	·	$-igE_3$
10	igE_3	gE_2	$-g^*B$	·	·	$(g-g^*)B$	·	·	·	$1-i(g-g^*)B$	igE_2	·	$-g^*B$	·	igE_3	·
11	·	$-g^*B$	gE_2	igE_3	·	·	$(g-g^*)B$	·	·	$-igE_2$	$1+i(g-g^*)B$	·	·	$-igE_3$	·	g^*B
12	$-g^*B$	·	igE_3	gE_2	·	·	·	$(g-g^*)B$	igE_2	·	·	$1-i(g-g^*)B$	igE_3	·	$-g^*B$	·
13	gE_3	$-igE_2$	ig^*B	·	·	$i(g^*-g)B$	·	·	·	$(g^*-g)B$	gE_2	·	$1+ig^*B$	·	gE_3	·
14	$-igE_2$	gE_3	·	ig^*B	$i(g^*-g)B$	·	·	·	$(g-g^*)B$	·	·	$-gE_2$	·	$1-ig^*B$	·	$-gE_3$
15	ig^*B	·	gE_3	$-igE_2$	·	·	·	$i(g^*-g)B$	gE_2	·	·	$(g^*-g)B$	gE_3	·	$1+ig^*B$	·
16	·	ig^*B	$-igE_2$	gE_3	·	·	$i(g^*-g)B$	·	·	$-gE_2$	$(g-g^*)B$	·	·	$-gE_3$	·	$1-ig^*B$

DET 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·
2	·	1	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	·	·	1	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4	·	·	·	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·
6	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	-1	·	·	·
7	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	1
8	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	-1	·
9	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	$-i$	·	·
10	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	$-i$	·	·	·
11	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	$-i$
12	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	$-i$	·
13	gE_3	$-igE_2$	ig^*B	·	·	$i(g^*-g)B$	·	·	·	$(g^*-g)B$	gE_2	·	$1+ig^*B$	·	gE_3	·
14	$-igE_2$	gE_3	·	ig^*B	$i(g^*-g)B$	·	·	·	$(g-g^*)B$	·	·	$-gE_2$	·	$1-ig^*B$	·	$-gE_3$
15	ig^*B	·	gE_3	$-igE_2$	·	·	·	$i(g^*-g)B$	gE_2	·	·	$(g^*-g)B$	gE_3	·	$1+ig^*B$	·
16	·	ig^*B	$-igE_2$	gE_3	·	·	$i(g^*-g)B$	·	·	$-gE_2$	$(g-g^*)B$	·	·	$-gE_3$	·	$1-ig^*B$

DET 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	•	•	•	•	•	•	•	•	1	•	•
2	•	1	•	•	•	•	•	•	-1	•	•	•
3	•	•	1	•	•	•	•	•	•	•	•	1
4	•	•	•	1	•	•	•	•	•	•	-1	•
5	•	•	•	•	1	•	•	•	•	$-i$	•	•
6	•	•	•	•	•	1	•	•	$-i$	•	•	•
7	•	•	•	•	•	•	1	•	•	•	•	$-i$
8	•	•	•	•	•	•	•	1	•	•	$-i$	•
9	•	$-igB$	igE_2	$-gE_3$	•	$(g^*-g)B$	gE_2	•	$1+ig^*B$	•	gE_3	•
10	$-igB$	•	$-gE_3$	igE_2	$(g-g^*)B$	•	•	$-gE_2$	•	$1-ig^*B$	•	$-gE_3$
11	igE_2	$-gE_3$	•	$-igB$	gE_2	•	•	$(g^*-g)B$	gE_3	•	$1+ig^*B$	•
12	$-gE_3$	igE_2	$-igB$	•	•	$-gE_2$	$(g-g^*)B$	•	•	$-gE_3$	•	$1-ig^*B$

DET 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	$2\lambda_2-\lambda_2-1-x$	.	.	.	.	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	.	$i(\lambda_1-\lambda_2)$	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	.
2	.	$2\lambda_1-\lambda_2-1-x$	.	.	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	.	$i(\lambda_2-\lambda_1)$	.	.	.	.	$\lambda_1-\lambda_2$
3	.	.	$2\lambda_1-\lambda_2-1-x$	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	.	$i(\lambda_1-\lambda_2)$	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	.
4	.	.	.	$2\lambda_1-\lambda_2-1-x$	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	.	$i(\lambda_2-\lambda_1)$	.	.	.	.	$\lambda_1-\lambda_2$	.	.
5	.	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	$1-\lambda_2-x$	.	.	.	$-i\lambda_2$	.	.	.	.	λ_2	.	.
6	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	$1-\lambda_2-x$	.	.	.	$i\lambda_2$	.	.	$-\lambda_2$	.	.	.
7	.	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	.	.	$1-\lambda_2-x$	.	.	.	$-i\lambda_2$	.	.	.	.	λ_2
8	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	.	.	.	.	$1-\lambda_2-x$	.	.	.	$i\lambda_2$	.	.	$-\lambda_2$	.
9	.	.	.	$i(\lambda_1-\lambda_2)$	$i\lambda_2$	.	.	.	$1-\lambda_2-x$	.	.	.	.	$-i\lambda_2$	.	.
10	.	.	$i(\lambda_2-\lambda_1)$	.	.	$-i\lambda_2$	.	.	.	$1-\lambda_2-x$	.	.	$-i\lambda_2$	.	.	.
11	.	$i(\lambda_1-\lambda_2)$	.	.	.	.	$i\lambda_2$	.	.	.	$1-\lambda_2-x$	.	.	.	.	$-i\lambda_2$
12	$i(\lambda_2-\lambda_1)$	.	.	.	.	.	.	$-i\lambda_2$	.	.	.	$1-\lambda_2-x$	.	.	$-i\lambda_2$	.
13	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	$-\lambda_2$	.	.	.	$i\lambda_2$	.	.	$1-\lambda_2-x$	.	.	.
14	.	.	.	$\lambda_1-\lambda_2$	λ_2	.	.	.	$i\lambda_2$	.	.	.	.	$1-\lambda_2-x$	.	.
15	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	.	.	.	.	$-\lambda_2$	.	.	.	$i\lambda_2$	.	.	$1-\lambda_2-x$	.
16	.	$\lambda_1-\lambda_2$	.	.	.	.	λ_2	.	.	.	$i\lambda_2$	.	.	.	.	$1-\lambda_2-x$

DET 5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	$2\lambda_1-\lambda_2-1-x$	$\lambda_2-\lambda_1$	$i(\lambda_1-\lambda_2)$	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$\lambda_2-\lambda_1$	$1-\lambda_2-x$	$i\lambda_2$	$-\lambda_2$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$i(\lambda_2-\lambda_1)$	$-i\lambda_2$	$1-\lambda_2-x$	$-i\lambda_2$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$\lambda_2-\lambda_1$	$-\lambda_2$	$i\lambda_2$	$1-\lambda_2-x$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	.	.	.	.	$2\lambda_1-\lambda_2-1-x$	$\lambda_2-\lambda_1$	$i(\lambda_2-\lambda_1)$	$\lambda_1-\lambda_2$	.	.	.	.	.	.	.	.
6	.	.	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	$1-\lambda_2-x$	$-i\lambda_2$	λ_2	.	.	.	.	.	.	.	.
7	.	.	.	.	$i(\lambda_1-\lambda_2)$	$i\lambda_2$	$1-\lambda_2-x$	$-i\lambda_2$	.	.	.	.	.	.	.	.
8	.	.	.	.	$\lambda_1-\lambda_2$	λ_2	$i\lambda_2$	$1-\lambda_2-x$	.	.	.	.	.	.	.	.
9	.	.	.	.	.	.	.	.	$2\lambda_1-\lambda_2-1-x$	$\lambda_2-\lambda_1$	$i(\lambda_1-\lambda_2)$	$\lambda_2-\lambda_1$	.	.	.	.
10	.	.	.	.	.	.	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	$1-\lambda_2-x$	$i\lambda_2$	$-\lambda_2$	.	.	.	.
11	.	.	.	.	.	.	.	.	$i(\lambda_2-\lambda_1)$	$-i\lambda_2$	$1-\lambda_2-x$	$-i\lambda_2$	.	.	.	.
12	.	.	.	.	.	.	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	$-\lambda_2$	$i\lambda_2$	$1-\lambda_2-x$	.	.	.	.
13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$2\lambda_1-\lambda_2-1-x$	$\lambda_2-\lambda_1$	$i(\lambda_2-\lambda_1)$	$\lambda_1-\lambda_2$
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\lambda_2-\lambda_1$	$1-\lambda_2-x$	$-i\lambda_2$	λ_2
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$i(\lambda_1-\lambda_2)$	$i\lambda_2$	$1-\lambda_2-x$	$-i\lambda_2$
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$\lambda_1-\lambda_2$	λ_2	$i\lambda_2$	$1-\lambda_2-x$

CONCLUSIONES

1.- Se ha estudiado en detalle el campo de Rarita-Schwinger en interacción con campos externos, y en especial con el campo electromagnético en acoplo mínimo y de Pauli, no hallando una teoría consistente debido a la aparición de velocidades de propagación superluminales así como relaciones de anticonmutación indefinidas.

Se obtiene una expresión general de las relaciones de anticonmutación a tiempos iguales para cualquier tipo de acoplo incluido el electromagnético y que engloba los diversos casos particulares estudiados hasta el presente. Dicha expresión permite calcular de forma directa el determinante característico, cuya solución establece las normales a las superficies características de la ecuación de campo.

Estos resultados se han generalizado a campos fermiónicos sometidos a ligaduras secundarias, mostrando la aparición de campos magnéticos críticos para el acoplo electromagnético mínimo independientemente de la ecuación de campo empleada. Ello permite extender el fenómeno de Velo y Zwanziger a una clase más general de ecuaciones de la cual Rarita-Schwinger es un caso particular.

Una teoría consistente de campos de spin superior en interacción con ligaduras secundarias exige, por tanto, la introducción de acoplos no electromagnéticos que cancelen los modos acausales y den lugar a una teoría local.

2.- La extensión del contenido dinámico del campo de RS a doce (RS^*) y dieciseis (RS^{**}) grados de libertad conduce a propagación causal y relaciones de anticonmutación locales en acoplo electromagnético mínimo y de Pauli, con la excepción de algunos acoplos de este último tipo en RS^*.

Se obtiene la matriz de scattering para estos campos y se demuestra la η-unitariedad, esto es, la unitariedad respecto de la métrica definida a partir de la corriente conservada.

La existencia de una métrica indefinida en RS^* y RS^{**} implica una matriz S no unitaria y la inestabilidad en el sentido de Wightman de una cuantificación no canónica sobre un espacio de Fock de métrica positiva, a menos que se desacoplen las componentes irreducibles de distinta norma.

El estudio de la matriz S en primer orden muestra que existe un único Lagrangiano de interacción RS^* y RS^{**} invariante Gauge y lineal en el campo electromagnético cuya descomposición en términos de los campos libres sea de la forma

$$\mathcal{L}_I^{(0)}(\psi) = \mathcal{L}_I^{'(0)}(\phi_{ph}) + \mathcal{L}_I^{''(0)}(\phi_{gh}) + \partial_\mu V^\mu(\phi_{ph}, \phi_{gh})$$

de manera que los términos de acoplo entre las componentes de norma positiva ϕ_{ph} y las de norma negativa ϕ_{gh} aparecen incluidas en una cuadridivergencia. El efecto de esta última se manifiesta en segundo orden, induciendo transiciones $\phi_{ph} \longleftrightarrow \phi_{gh}$ no permitidas en primer orden. En RS^{**} el método de contratérminos es aplicable nuevamente en 2° orden. Si el número de contratérminos necesarios para cancelar las transiciones a todos los ordenes fuera finito se podría afirmar la existencia de una teoría unitaria en la que se mantuviesen separados dos campos de spines 3/2, 1/2 y un campo de spin 1/2.

Resumiendo: el presente estudio confirma una vez más la conjetura de que ecuaciones de campos masivos de spin superior o sonacausales o son inestables.

Puede ser que en el futuro la experiencia o la sana teoría muestren lo contrario. Entre tanto conservemos el beneficio de la duda.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

[1] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A 155, 447 (1936); Com. J. Math. 2, 129(1950), Phys. Rev. 114, 924 (1959).

[2] M. Fierz y W. Pauli, Proc. Roy. Soc. A173, 211 (1939).

[3] V. Bargmann y E.P. Wigner, Proc. Acad. Sci. 34, 211 (1948).

[4] W. Rarita y J. Schwinger, Phys. Rev. 60, 61 (1941).

[5] K. Johnson y E. Sudarshan, Ann. Phys. 13, 126 (1961).

[6] G. Velo y D. Zwanziger, Phys. Rev. 186, 1337 (1969).

[7] G. Velo y D. Zwanziger, Phys. Rev. 188, 2218 (1969).

[8] G. Velo y D. Zwanziger, pags.8-22, Tracts in Mathematical and Natural Sciences, vol.4, Gordon and Breach 1971.

[9] D. Zwanziger, pags. 143-164, Lecture Notes in Physics 73, Springer-Verlag 1978.

[10] A.S. Wightman, pags. 298-312, Symmetry Principles at High Energy, Benjamin 1968.

[11] A.S. Wightman, pags. 423-460, Studies in Mathematical Physics Essays in Honor of Valentine Bargmann, Princeton University Press 1976.

[12] A.S. Wightmann, pags. 441-477, Partial Differential Equations, Proc. of Symposia in Pure Math., vol.XXIII, Amer. Soc. 1973.
A.S. Wightmann, pgs. 1-101, Lecture Notes in Physics 73, Springer-Verlag 1978.

[13] G. Iverson, pgs. 44-64, Tracts in Mathematical and Natural Sciences, vol.4 Gordon and Breach 1971.

[14] W.J. Hurley, Phys. Rev. D4, 3605 (1971); Phys. Rev. Lett 29, 1475 (1972).

[15] W.J. Hurley y E. Sudarshan, Ann. Phys. 85, 546 (1974).

[16] P.A. Maldauer y K.M. Case, Phys. Rev. 102, 279 (1956).

[17] Y. Takahashi y M. Umezawa, Progr. Theor. Phys. 9, 1450 (1950); Progrs. Theor. Phys. 9, 1 (1953); Nucl. Phys. 51, 193 (1964).

[18] A. Kawakami y S. Kamefuchi, Nuovo Cimento 48A, 239 (1967).

[19] S. Kamefuchi y Y. Takahashi, Nuovo Cimento 44, 1 (1966).

[20] S. Kamefuchi, L. O'Raifeartaigh y A. Salam, Nucl. Phys. 28, 529 (1961).

[21] J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 919 (1951); Phys. Rev. 91, 713 (1953).

[22] J. Madore y W. Tait, Comm. Math. Phys. 30, 201 (1973).

[23] R.A. Krajcik y M.N. Nieto, Phys. Rev. D 15, 445 (1977).

[24] L.M. Nath, B. Etemadi y J.D. Kimal, Phys. Rev. D3, 2153 (1971)

[25] C.R. Hagen, Phys. Rev. D4, 2204 (1971).

[26] A. Shamaly y A.Z. Capri, Ann. Phys. 74, 503 (1972).

[27] A.Z. Capri y A. Shamaly, Can. J. Phys. 52, 917 (1974); Can. J. Phys. 52, 919 (1974); Can. J. Phys. 54, 1089 (1976).

[28] A.Z. Capri y R. Kobes, Phys. Rev. D22, 1967 (1980).

[29] A.F. Rañada y G. Sierra Rodero, Phys. Rev. D22, 385 (1980).

[30] A.F. Rañada y G. Sierra Rodero, Phys. Rev. D22, 2416 (1980).

[31] S. Deser y B. Zumino, Phys. Rev. Lett 38, 1433 (1977).

[32] "Méthodes of Mathematical Physics", vol.2, R. Corant y D. Hilbert (Interscience 1962).

[33] "Relativistic Quantum Fields" J.D. Bjorken y S.D. Drell (McGraw-Hill 1965).

[34] "Particle and Fields", D. Lurié (Interscience 1968).

[35] "Introduction a la theorie quantique des champs", N.N. Bogolioubov y D.V. Chirkov (Dunod Paris 1960).

[36] "Mecánica Cuántica", A. Galindo y P. Pascual (Alhambra 1978).

[37] "Lectures on Quantum Electrodinamics" E. de Rafael (G.I.F.T. Lectures 1976, UAB).

[38] "Formalisme lagrangien et lois de symetrie", M. Gourdin (Gordon-Breach 1967).

[39] "Spin and Isospin in Particle Physics", P.A. Carruthers (Gordon Breach 1971).

[40] "The theory of photons and electrons" J.M. Jauch y F. Rohrlich (Springer Verlag 1976).

[41] "Quantum field theory" H. Umezawa (North-Holland 1956).

[42] "State vector spaces with indefinite metric in quantum field theory" K.L. Nagy (Noordhoft-Groningen 1966).

[43] "An introduction to Field Quantization", Y. Takahashi (Pergamon Press 1969).

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha acordó calificar la presente Tesis Doctoral con la censura de

SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Madrid, 29 de Junio 1987